数学教学

2005年第3期

目　　录

初中数学教学

新课标理念下的数学学习评价 …… 李文革 (封二)
课程标准与几何证题 …… 袁　桐　崔蓉蓉 (3–1)
初二学生对图象理解的调查分析 …… 张　波　季春兰 (3–3)
一堂"生活中的轴对称"公开课的教学与评析 …… 姚志敏 (3–6)
教学实录:探索勾股定理(一) …… 李庆社 (3–9)
立足"视图" 重视考查"空间观念" …… 潘振南 (3–12)
图形分割问题 …… 闵　晟 (3–15)

高中数学教学

指导学生数学阅读的若干方法 …… 高国平 (3–17)
利用向量解决点到平面的距离问题 …… 杨丽婷 (3–18)
关于二元函数条件极值问题的教学实录 …… 申志莲 (3–21)

数学探究

数学归纳法中传递性的探究 …… 高伟鹏 (3–24)
探索条件等式求值　注重师生课堂交流 …… 陆振新　朱绍志 (3–25)
从探究$y=\dfrac{1}{f(x)}$型函数的值域谈起 …… 王　迪 (3–27)
对平方数累加公式的探讨 …… 狄海鸣 (3–30)
函数单调性与数列单调性的整合 …… 胡耀宇 (3–31)

数学解题研究

善待学习圆锥曲线时发生的认知错误 …… 薄立平　薛党鹏 (3–33)
抽象函数的解题策略 …… 沈红正 (3–34)
一种二次方程根的分布讨论及简化策略 …… 徐世白 (3–37)
递推数列求通项大观 …… 劳建祥 (3–39)
构造向量解决有关初等代数问题 …… 张定强 (3–45)
例析解概率题中的几类典型错误及错因 …… 孙翠玲 (3–48)

编后漫笔

关于教师的"一桶水" …… (封底)

新课标理念下的数学学习评价

200062 华东师范大学出版社 李文革

一、树立评价为学生服务的思想

1. 营造友善的评价氛围

评价是以促进学生的发展为最终目的的. 但在实际操作中, 我们往往有意无意地把师生视为评价中对立的双方, 习惯于从怎么样考倒学生出发, 人为设置“陷阱”, 让学生去跳. 为了有效地促进学生的发展, 我们必须全面真实地了解学生, 为此, 必须创造条件让学生充分发挥真实水平. 应该改变试卷的面孔, 让试题变得友善起来, 体现人性化色彩. 在一份2004年新课标实验区中考的试卷最后有下面一段话: “祝贺你做完了考题, 请再仔细检查一遍, 看看有没有错的、漏的, 别留下什么遗憾哦!” 这段话让学生感到: 考试本身就是希望他考出好成绩, 并没有设“陷阱”为难他, 从而紧张的心情会得到一定程度地缓解.

2. 评价是学生学习的组成部分

由于教师往往把考试作为给学生分类划等的依据, 因此学生害怕考试, 常常是“谈考色变”. 教师一方面应该把考试作为教学的一个组成部分; 另一方面, 应该让学生感到: 考试是他学习的一个组成部分, 而不是与学习毫不相干的对他的“宣判”. 下面是某实验区的一道中考题:

例1 解方程:

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{x+3}=1.$$

别忘了验根哦!

此题加这样一个云图, 既不影响考查学生解分式方程的基本思想: 把分式方程转化为整式方程. 同时也给学生提供一个学习机会: 解分式方程需要验根, 是学生容易疏忽的, 加这样一个云图, 能够加深学生对“解分式方程需要验根”的印象, 使“解分式方程需要验根”这个基本知识有可能在他头脑中更长时间保留下来(以后每次遇到解分式方程, 他就会想到参加中考时, 曾经有一个云图提醒他: 解分式方程需要验根). 从这个意义上讲, 这次中考实际上也是给他提供了一个很好的学习机会.

3. 关注学生的纵向发展

每次考试评价后, 我们往往习惯于把学生进行横向比较, 给他们分类划等. 实际上, 学生之间是有差异的, 横向比较往往弊大于利, 它不仅不利于学生的发展, 而且有可能阻碍学生的发展. 为了有效地促进学生的发展, 我们应该时刻关注学生在学习过程中的变化与发展, 即他的纵向发展,适时地对他的发展给予引导. 因此, 评价的结果除了分数和等级外, 应该还包括一定的说明和建议.

二、开发新题型

新一轮课程改革既有知识性目标, 又有过程性目标; 既要帮助学生掌握“双基”, 又要促进学生的发展. 传统题基本上是帮助学生掌握“双基”的, 因此, 它有明显的局限性. 具体地说, 在传统题中, 操作性的题目多, 有趣有用的题目少; 封闭性的题目多, 有创造力的题目少; 形式化的题目多, 来自实际的题目少. 对于这类题, 学生以给出正确的解答(特别是在考试中)作为自己的学习目标, 并认为实现这一目标的最有效途径就是牢牢记住教师给出的方法, 并通过模仿以获得教师所希望的解答. 新题型则希望能够考察超出记忆水平的更深刻的理解. 如:

例2 传统题:

填空: 两点之间, ________ 最短.

新题型: 请利用一个实际生活中的例子说明“两点之间, 线段最短”.

传统题与新题型都是考查“两点之间, 线段

课程标准与几何证题

225008 江苏省扬州新东方中学 表 桐 225001 江苏省扬州市第一中学 崔蓉蓉

跨越十九世纪到二十世纪的著名数学家、数学教育家克莱因, 在他24岁时, 在就任教授的就职演说——题为《近代几何研究》一文中指出, 几何是图形对某种变换群保持不变性质的学说, 即有名的《爱尔兰根纲领》.

中学的平面几何, 可以看作是研究平面图形在对称、平移、旋转、相似几种变换下的不变性问题. 60年代, 不少数学家为中学生写了

~~~~~~

最短”这一知识点, 但传统题只需要识记, 而且它会给学生一个错误的学习方法的导向: 死记硬背; 新题型靠死记硬背行不通, 而是需要理解, 它会给学生一个正确的学习方法的导向: 必须理解.

三、增加试题的选择性

义务教育课程标准明确指出: 不同的人学不同的数学, 人人都获得需要的数学. 根据课程标准编写的教材注意了弹性, 除了所有学生都应掌握的最基本的内容外, 还有供不同层次学生选学的内容. 教师应根据学生的不同特点, 对他们提出不同的学习要求, 相应地, 对学生的考试评价也应有不同的要求.

许多实验区在增加试题的选择性方面进行了有益尝试. 有些实验区在考试前命不同水平的试卷, 比如说, A、B、C三个水平, 考试时让学生去选择: 有些实验区在一道大题中安排几个不同水平的小题, 赋予不同的分值, 让学生选做(如例3). 所有这些尝试都为如何增加试题的选择性提供了宝贵的经验.

例3 此题有A、B、C三类题目, 其中A类题4分, B类题6分, C类题8分. 请你任选一类证明, 多证明的题目不记分.

(A类) 已知: 如图1, $AB = AC$, $AD = AE$. 求证: $\angle B$等于$\angle C$.

(B类) 已知: 如图2, $CE \perp AB$于点E, $BD \perp AC$于点D, BD、CE交于点O, 且AO平分$\angle BAC$. 求证: $OB = OC$.

(C类) 已知: 如图3, $\triangle ABD$与$\triangle CDH$都是等腰直角三角形, 且D在BC上, BH的延长线与AC交于点E, 请你在图中找出一对全等三角形, 并写出证明过程.

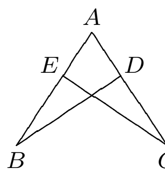


图 1

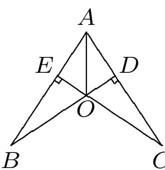


图 2

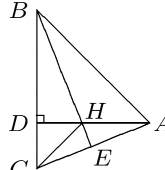


图 3

四、构建合理的数学训练系统

构建合理的数学训练系统, 必须做到发展性训练与基础性训练有机整合、协调互补.

首先, 必须重视基础性训练. 新一轮课程改革仍然强调重视“双基”, “双基”是发展的起点, 是发展的平台; 发展是“双基”的目标. 我们过去的“双基”是不顾发展的纯粹的“双基”, 因此, 往往是一堆静态的所谓“知识点”. 而“双基”也应包含与发展密切相关的动态的过程性知识和技能. 如考解方程, 可以先给学生一个实际问题, 让他有一个“数学化”的过程, 最后归结为解方程这一“双基”.

其次, 要充实具有实践性、应用性、探索性和开放性的习题. 这类习题一方面可以发展学生的思维水平, 提高学生解决问题的能力, 另一方面, 拉近了数学与实际生活的距离, 让学生感到数学很亲切、有用、生动, 就在我们身边, 从而提升学生的数学素养.
~~~~~~

数学课外读物, 象段学复先生的《对称》、蒋声先生的《几何变换》等等, 都深入浅出地介绍了变换群的问题, 还介绍了球面几何、球面三角、拓扑问题等. 我们目前用的课程标准, 正是从这些变换的直观形象出发, 突出变换实质, 它代表了平面几何的实质.

1981年, 人民教育出版社曾经翻译出版了原苏联的中学教材, 指出"证明方法方面, 本书主要以几何变换和向量作为证明几何事实的手段, 这同传统几何也是不同的." 读过该教材的读者会体会到, 该书叙述抽象、严格, 又有新意. 我们的课程标准, 没有采取这种抽象的方式, 但是突出了几何变换的手段.

日本的数学课本对几何内容采取了"删"的做法, 也突出了"变换"的方法. 例如人民教育出版社出版的、日本旺文社编的《初中入学考试题选》中, 就可以看出日本在小学数学教学中就渗透了较多的几何变换意识.

新的几何课本在叙述上与过去略有不同, 但证明的严密性并没有削弱. 由对称谈等腰三角形; 由平移到平行四边形的判定定理、性质定理的证明, 都是新思路, 而且很严格. 但与传统的几何教学中的证明方法有所不同.

在笔者看来, 我们教师应当反思过去的"熟"题、"熟"方法, "引进"一些新题、新方法, 从感情上接近课程标准, 我们认为这也是一种业务上的提高.

下面举几个作为抛砖引玉的习题:

1. 如图1, 已知AD是$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线, 又知$AB = AC + CD$, 求证$\angle C = 2\angle B$.

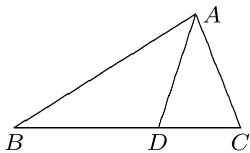


图 1

提示: AD是$\angle A$的平分线, AD就是$\angle A$的一条对称轴. 因此, 证明的第一步是"作出$\triangle ACD$关于AD的对称图形", 利用轴对称图形的性质, 将点C变换到直线AB上, 再研究$\angle B$和$\angle C$的关系. 下略.

2. 在定底定高的三角形中, 等腰三角形的周长最短.

提示: 如图2, $\triangle ABC$与$\triangle EBC$具有等底、等高的条件, 则$EA /\!/ BC$. 以EA为对称轴, 将AC、EC变换为AD、ED, 使AB、AC、EB、EC置于同一三角形中, 可以表现出两个三角形的周长.

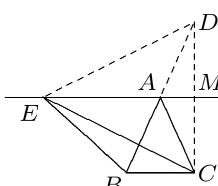


图 2

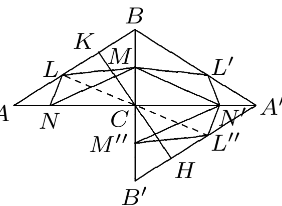


图 3

3. 证明直角三角形中任一内接三角形的半周长大于斜边上的高.

提示: 如图3, 作两次轴对称. 第一次$\triangle ABC$关于轴BC得$\triangle A'BC$; 第二次$\triangle A'BC$关于轴$A'C$得$\triangle A'B'C$. 原$\triangle LMN$的周长转化为$LM + MN' + N'L'' = l$, 不难知道$l \geqslant LL'' > A'B'$与AB的距离KH. $\therefore\ \dfrac{l}{2} > CK$.

4. 已知等腰直角$\triangle ABC$中, 点O至三顶点的距离为$OC = 2$, $OA = 4$, $OB = 6$, $\angle A = 90^\circ$. 求证$\angle COA = 135^\circ$.

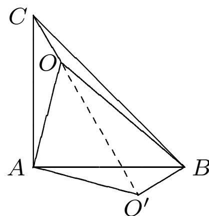


图 4

提示: 如图4, 以A为中心, 将$\triangle AOC$顺时针旋转90°, 得$\triangle AO'B$. 由旋转的概念知: $\angle OAO' = 90^\circ$, $OA = OA'$. 因此$\triangle OAO'$是等腰直角三角形, $\angle OO'A = 45^\circ$, $OO' = 4\sqrt{2}$. 又在$\triangle OO'B$中, $O'B = 2$, $OO' = 4\sqrt{2}$, $OB = 6$, 由勾股定理逆定理知$\triangle OO'B$为直角三角形, $\angle OO'B$为90°. $\therefore\ \angle AOC = \angle AO'B = 135^\circ$.

初二学生对图象理解的调查分析

200062 华东师范大学数学系03级博士生 张 波 215129 江苏省苏州新区二中 季春兰

《全日制义务教育数学课程标准》对义务教育阶段的数学教学内容要求作了调整和规划. 在“空间与图形”的内容结构上, 除保留原来对图形的认识、测量、图形的位置, 以及证明等外, 还安排了坐标几何的初步知识——图形与坐标.

为了了解学生对隐藏于图象内容之中的重要思想是否理解, 以及所处的思维水平, 从而进行有效的教学, 笔者于2004年5月对江苏省苏州新区二中的初二学生进行了问卷调查. 该校在苏州地区的教学水平处于中游, 学生都是就近入学, 因此基本上能够反映整个地区的初中学生的水平. 本次调查发放问卷189份, 回收有效问卷189份.

1. 调查内容

问卷涉及坐标系概念, 刻度的使用, 比率、梯度、连续以及图象与代数方程之间的联系.

本调查共7个大问题, 27个小问题. 这些问题的设计参照英国CSMS小组(Concepts and Secondary Mathematics and Science)对英国

---

5. 设$\triangle ABC$为正三角形, P为任意点, 求证 $PA \leqslant PB + PC$.

提示: 如图5, 将$\triangle BPC$绕点B 逆时针旋转60°. 易知点C与点A重合, $\triangle BPQ$为正三角形. $\therefore$ $BP + PC = BQ + QA = PQ + QA \geqslant PA$.

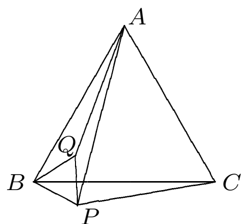


图 5

推论: 如果研究一下等号成立的条件, 可知在$PQ + QA = PA$时, $\angle BPA = 60°$, 即B、P、C、A共圆, 此时$\angle BPC = 120°$. 于是还可以证明以下结论.

6. 锐角$\triangle ABC$内, 到三个顶点距离和最小的点O, 必满足$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$.

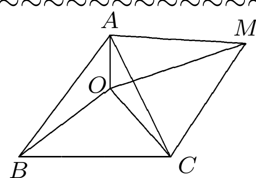


图 6

提示: 如图6, 以AC为边在形外作正$\triangle AMC$, 则由题5知:

$OA + OC \geqslant OM$, $OA + OC + OB \geqslant BO + OM$, 要求$OA + OC + OB$最小, 首先要求$\angle AOC = 120°$, 此时$\angle AOM = 60°$, 更要求$B$、$O$、$M$共线, 即要求$\angle BOC = \angle BOA = 120°$.

结束语: 由于篇幅关系, 只举了上述数题. 其实, 认真钻研, 反思一下, 题目是很多的. 例如不等问题、圆的问题、……, 不依赖于三角形全等, 只要用对称、平移、旋转的概念和动作, 能证明的问题很多.

笔者认为, 课程标准中注重几何变换的方向是正确的, 这既可以把初中学生从题海中解救出来, 也可以实现中学几何教学的功能.

学生做的一次关于对图象理解的调查.

问题被设计处于不同的水平, 且半数问题以非常规的学生不熟悉的形式出现, 目的是使学生不能单凭记忆, 按照程序化的知识来回答, 从而获取他们对问题本质理解的信息.

2. 调查结果与分析

调查问卷中的第一个问题是: 请在以下两个坐标系中找出点 $A(4,6)$ 以及点 $B(7,6)$, 并在图上标出他们的位置.

在图1的直角坐标系中标出点的正确率为 95.6%. 用图2中的坐标系的目的是, 调查学生能否应用他们已经学到的关于坐标系的知识.

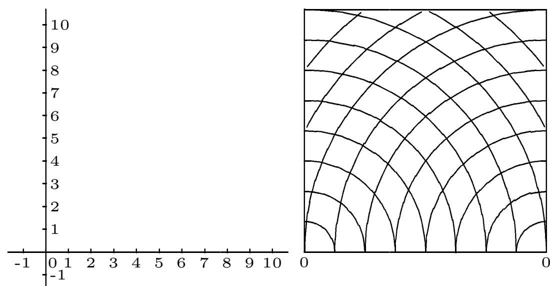


图 1　　图 2

对此, 学生的回答情况如下表所示:

学生	未做	做错		找对一点	正确
		自建直角坐标系	未自建坐标系		
人数	47	88	27	5	22
比例	24.87%	46.56%	14.29%	2.64%	11.64%

显然学生很难适应他们所面临的新情况. 在未能找对坐标的学生中, 自建直角坐标系的比例接近整个调查人数的一半. 这一现象表明, 在面临不熟悉的情境时, 学生通常采纳的解决问题的策略是把不熟悉的问题转化为熟悉的问题.

问卷中的第三个问题是: 老师为班上的学生画了一张图, 表示他们的身高和胸围. 点 A 表示学生1, 点 B 表示学生2, 点 C 表示学生3, 点 D 表示学生4, 点 E 表示学生5. 问

(1) 学生1身高多少?

(2) 学生2胸围多少?

(3) 学生6的身高为150厘米, 胸围是70厘米, 请在图上画出表示他的点 F.

(4) 你能说说学生3的外型吗?

(5) 我们应该把这些点连起来吗?

(6) 对于问题(5), 为什么你这样认为?

(7) 如果某个学生的胸围是65厘米, 你能从这推断出什么?

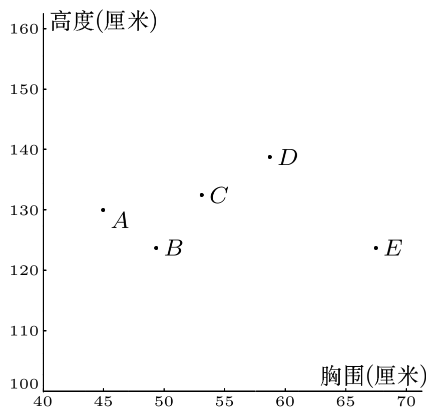


图 3

问这个问题的目的是, 调查学生能否读懂散点图, 并且是否能够理解把分散的点连接起来的含义. 学生对于前四题, 回答正确率都在 85%以上. 而对于第(5)和第(6)问, 学生的回答出现明显差异. 如下表:

学生	没有回答	认为不应该连接各点	认为应该连接各点
人数	3	99	87
比例	1.59%	52.39%	49.02%

回答不应该连接各点的原因有以下典型的几种: (1) 连接起来没有意义; (2) 胸围和身高之间没有关系; (3) 胸围和身高不成比例; (4) 没有什么用; (5) 这些胸围和身高属于不同的学生; (6) 不在同一直线上.

回答应该连接各点的原因有以下典型的几种: (1) 可以表示出身高和胸围之间的变化; (2) 用折线连接; (3) 看起来比较清楚, 能直观地反映问题; (4) 容易看出学生的个体差异.

认为不能连接的学生, 能对此问题中的第7小题合理推断的比率为 30.3%, 而认为能够连接的学生能进行合理推断的为 36.78%. 可见学生认为回答是否可以把点连接起来和是否能解释中间点的意思之间没有必然联系. 也就是说, 他们没有能正确理解把分散的点连接起来的意义所在.

调查问卷的第六个问题是: 以下是直线 y

$= 3x - 5$的图象(图4), 问:

(1) 图中虚线部分的线段有多长?

(2) 你认为线段PQ和这条直线平行吗?

(3) 对于问题(2), 你为什么这样认为?

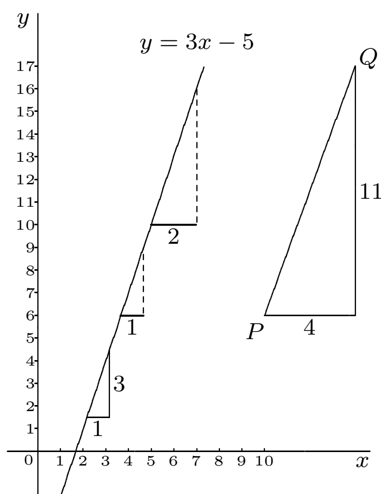


图 4

问题(1)的回答正确率比较低, 约占33.33%. 学生倾向于用刻度尺量出长度. 问题(2)、(3)的目的是检查学生能否把图形和代数知识联系起来. 学生回答的结果如下表:

学生	没有回答	认为平行	认为不平行
人数	9	95	85
比例	4.76%	50.27%	44.97%

认为PQ与该直线平行的典型理由有: (1) 用直尺平移; (2) 直觉; (3) 看上去平行; (4) 三角形相似.

认为不平行的典型理由有: (1) 对应线段不成比例; (2) 三角形不相似; (3) 用直尺平移; (4) 直觉.

两类学生都在很大程度上, 受到图形直观的影响. 认为平行的学生受这种影响更大. 能够用比例关系或者想到要用三角形相似来判断两线段是否平行的学生比较少, 占总学生数的29.1%. 学生对于把图形和代数知识联系起来感到困难, 有的学生根本没有这种意识.

问卷中其他四个问题分别涉及图象的连续性、时间、路程, 以及直线相交与线性方程的关系. 从纯粹数学角度来看, 这几个问题的难度高于找点的坐标或者理解散点图. 调查结果却表明, 学生回答的正确率都在80%以上. 可能的原因是, 这四个问题在表现形式上与常规问题比较接近. 学生可以依赖记忆回答.

3. 教学建议

CSMS小组把学生对图象的理解, 分为三种水平. 水平1: 能在坐标系中表示点, 画出块状图, 识别表示某斜率的直线, 能够解释散点图; 水平2: 解释图形, 能够识别上升的速率与梯度之间的关系. 会使用图中给出的度量, 解释简单的旅程图, 认识到度量的变化对图象的影响; 水平3: 能够理解图形与代数表达式之间的联系.

参照该研究的分析指标体系, 调查问卷的27个小问题中有13个在水平1, 7个在水平2 7个在水平3. 根据调查结果, 我们的学生在各个水平层次上的总的分布情况如下:

	达到该水平学生比例	及格标准
水平0	5.82% (11人)	答对10小题以下
水平1	34.39% (65人)	答对10−15题
水平2	47.62% (90人)	答对15−21题
水平3	12.17% (23人)	答对21−27题

按照以上对学生水平的分析, 我们对中学图象的教学提出三点建议:

(1) 课程中的图象. 有关图象的许多方面的内容按理说应在中学生可以掌握的范围之内, 包括块图, 代数式的图象表出以及在图象上画点. 然而由调查表明在能从图形上读出信息与把图形与代数联系起来之间, 存在着理解的鸿沟. 即尽管大部分学生能从图形准确读出信息, 但很少有学生能理解图象与方程之间的关系. 因此, 在教学过程中, 必须引导学生, 探索图形和方程之间联系.

(2) 图象的可视外观. 尽管引入图象的一个重要目的是为了用可视的形式来阐明某个数据或者函数, 但是有时图形也会由于其可视性而误导学生, 这个障碍在考虑线段平行的问题中表现得尤为明显. 我们在教学中需要确信学生不被图形所误导.

(3) 思维的层次. 在学习图形内容的时候, 必须认识到把它与学生的实际发展水平联系起来的重要性. 很多教材一开始就涉及坐标,

(下转封底)

一堂“生活中的轴对称”公开课的教学与评析

321000 浙江省绍兴县教育局教研室 姚志敏

背景介绍

在新课程的理念下, 学生的课堂学习方式发生了根本性改变, 动手实践、自主探索、合作交流已成为学习数学的重要方式. 绍兴县秋瑾中学王科英老师的《生活中的轴对称》课案, 精心设计了教学过程, 引导学生经历“做数学的过程”, 让学生动手、动脑和协作学习来探索问题, 促进学生的发展. 探索活动的设计始终围绕本节课的主题展开, 从每个学生的角度去发现问题、思考问题和解决问题, 体现“以人为本”, 充分展示学生个性, 倡导一种和谐、平等、互动的课堂教学模式. 下面是这节课的过程描述及课后反思.

过程实录

一、创设情景, 引人课题

1. *剪纸活动*

师: 我们来做一个剪纸游戏, 看谁剪出的图案最漂亮, 最有创意?

教师示范: 将彩纸对折, 沿折痕画简单的线条, 剪出一棵圣诞树.

学生操作: 剪出各种各样的图形, 有鱼、花、爱心、葫芦、衣服等, 教师挑选三幅作品贴在黑板上.

师: 观察这些图形有什么共同的特点?

生1: 左右两边一样.

生2: 对折的两部分是完全重合的.

师: 很好, 对折后两部分完全重合, 也就是这两部分是对称的. 其实我们就生活在一个充满对称的世界之中, 从自然界中的动物、植物, 到小巧精致的工艺品和雄伟壮丽的建筑, 处处体现了对称给人类带来的平衡之美与和谐之美, 让我们一起来感受一下这种美.

2. *多媒体演示以下一组图片: 蝴蝶、建筑物、脸谱、蜻蜓、⋯⋯ (演示完毕, 出示课题9.1 生活中的轴对称)*

点评: 通过每个学生的剪纸, 小组交流, 既培养了学生的独立探究能力, 又增强了学生的合作意识, 并通过自然界的对称美激发了学生的探索热情, 积极去追求知识的完美, 符合新课程标准的理念.

二、提出问题, 积极探索

1. *探索1 (轴对称图形)*

(1) 学生归纳定义

多媒体课件演示几幅轴对称图形 (蝴蝶、山倒映水中、等腰三角形) 沿直线对折重合的过程, 请学生仔细观察屏幕上反复折叠的演示过程, 讨论, 归纳得出轴对称图形的定义.

点评: 学生探索轴对称图形的特征时, 教师演示了“反复”折叠这一过程, 意在培养观察、归纳能力, 学生通过感性认识了解对称之美, 并渴求更深层次的知识, 体现了学生的学习是在原有知识基础上的自我生成过程.

(2) 基础知识题

师: 我们日常生活中有很多物体的平面图是轴对称图形, 大家能举例说说吗?

(学生回答有人体、飞机、加拿大国旗、眼镜、⋯⋯.)

师: 大家说得非常好, 我发现同学们思路特别开阔, 知识面特别广泛, 平时对事物的观察也特别细致.

点评: 及时表扬, 使不同层次的学生都感受数学乐趣.

知识应用: 书本P.68练习2.

点评: 做完练习后, 教师要求学生探索: 判断一个图形是否是轴对称图形, 要从不同的角度去观察, 不能有思维定势——认为左右才可

以对称, 培养学生多角度分析问题, 并相互交流, 养成集体合作的意识.

师:前面我们已经认识了很多平面图形,一起来找找图1所示的平面图形中, 哪些是轴对称图形? 找出轴对称图形的所有对称轴.

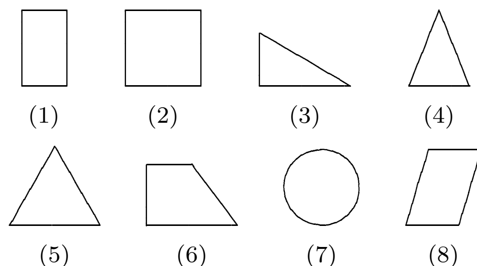


图 1

学生独立思考之后, 小组展开讨论、交流, 小组代表发表意见, 各组互相补充.

师:真棒, 由此我们可以知道一个轴对称图形的对称轴条数是否只有一条?

生(大部分):不是, 不同的轴对称图形可以有不同的对称轴条数.

点评:从生活的实际情景中、几何图形中来认识轴对称图形, 从最近发展区原理来看, 符合学生的认知规律.

(3) 英语能力题

师:前面同学们的表现都非常出色,那老师要来考考大家的英语能力.

出示英语能力题: Which of these times are symmetrical?

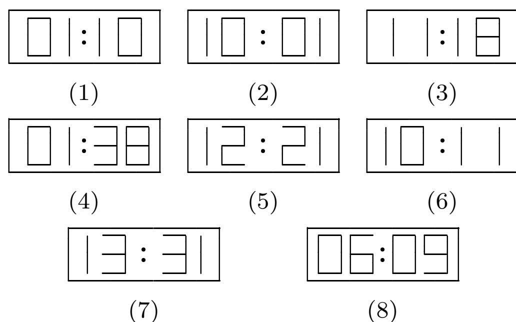


图 2

师:谁能翻译一下题意?

生:下列时间哪些是轴对称图形?

小组展开讨论, 2 ~ 3分钟后.

师:第二小组来发表一下你们的见解.

生:前7个时间都是(图2(1) − (7)).

师:有不同意见吗?

班长举手.

师:好, 请说出与他们意见不一致的地方.

班长:我觉得图2(5)不是, 左右对折, “2”字不能完全重合.

生:嗯, 对 (点头, 若有所悟).

师:明白了吗? 其中图2(1)、2(2)两个时间分别有几条对称轴?

生:明白, 两条.

点评:出示英语题既是调动学生的学习兴趣, 又是学科间相互渗透的体现, 同时对学生探索能力的培养起到较好的作用, 尤其培养了学生勇于思考, 积极探索的科学精神. 寓教于乐.

(4) 动手操作题

师:基于大家刚才的表现, 老师相信你们肯定能找出下面问题的答案.

出示动手操作题:如图3所示, 由4个小正方形组成的L形图中, 请你在图中添加一个同样大小的正方形, 使之成为轴对称图形.

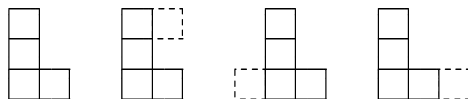


图 3 图 4 图 5 图 6

将3个由纸板剪成L形图贴在黑板上, 鼓励学生上来动手尝试. 学生纷纷举手, 踊跃答题. 经过讨论, 学生完全有能力将图4、图5、图6, 三种情况回答完整.

点评:这里让学生观察、想象、讨论、动手实践, 将不同层次的学生都调动起来, 激励他们学习的信心, 为学生的能力提高和知识掌握营造了良好的环境. 教师在生活和实践的背景下引导了学生对轴对称图形理解.

2. 探索2(轴对称)

(1)屏幕展出建筑物倒映在水中的轴对称图形, 利用多媒体技术将轴对称图形的上下两部分以轴对称为分界线, 用同样的速度上、下平移.

师:请大家观察:任何时刻这两个图形存在什么样的关系? 沿对称轴对折会怎样?

在教师引导下, 学生通过观察、讨论, 得出轴对称定义.

(2) 出示一组图形 (图7), 这两个图形成轴对称吗?

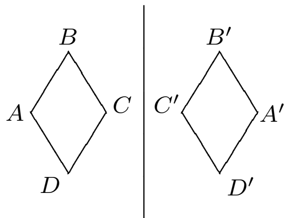


图 7

生 (众): 成轴对称.

多媒体演示多次翻折重合过程, 加深学生理解.

师: 两个图形重合时我们发现点 A 和哪个点重合?

此处通过提问引出对称点、对应边、对应角等概念, 及对应边相等、对应角相等的性质.

(3) 应用新知

a. 如图8, 直角三角形 ABC 中, $\angle C$ 是直角, 点 B 在直线 MN 上, $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于直线 MN 对称, 回答下列问题:

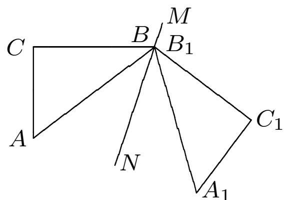


图 8

1) 点 B 的对称点是__________, AC 的对应边是__________, $\angle C$ 的对应角是__________.

2) $\triangle A_1B_1C_1$ 是__________三角形, 因为__________.

b. 墨水实验 (两位学生上来操作, 作出轴对称图形和两块墨迹成轴对称).

c. 动手操作题

师: 你能用手中两块大小、形状完全一样的直角三角形纸片 (课前已准备好), 拼轴对称图形吗? 试一试, 看组内同学的拼法是否一样.

学生动手操作, 小组讨论, 并将不同的拼法贴在黑板上, 教师巡视, 指点.

师: 同学们思路开阔, 找到了这么多的拼法, 真棒, 那大家再思考, 能否将这些轴对称图形稍加改变, 使这两块形状、大小一致的直角三角形纸片折成轴对称?

生 (少数): 能, 将轴对称图形拉开.

师: 对, 虽然将对称的两部分对称轴平移开就可以, 但拉开的距离要一致.

师 (指向拼成矩形的轴对称图形): 这个图形将两块三角形拉开, 它们成轴对称吗 (学生生面露困惑之色)?

师: 拉开后, 对折试试.

生: 不成轴对称.

师: 由此, 大小、形状相同的两个图形是否一定能关于某直线成轴对称呢?

生 (众): 不一定.

师: 对, 成轴对称的两个图形不但形状, 大小完全一致, 而且对于它们的位置有一定的要求, 即对折后要能完全重合.

点评: 通过自主探索、小组交流, 把轴对称概念予以描述, 同时和轴对称图形进行比较, 达到了积极参与和有效合作的和谐统一. 通过小组学习, 让学生学会合作; 通过全班交流, 共同讨论、探索数学规律, 让学生学会学习. 发挥了学生数学学习的主动性和积极性. 体现人人学习有价值的数学理念.

三、启发引导, 归纳小结

师生共同完成下表

"轴对称图形"和"轴对称"的区别与联系:

	轴对称图形	轴对称
区别	是具有某种特点的一个图形.	两个图形之间的一种大小和位置关系.
联系	1. 轴对称图形和轴对称都有对称轴. 2. 如果把轴对称图形沿着对称轴分成两部分, 那么这两个部分的图形关于这条直线成轴对称. 3. 如果把轴对称的两个图形看成一个整体, 那么它就是一个轴对称图形.	

点评: 通过学生对所学知识收集、整理、交流, 体现学生的主体性, 培养学生的归纳能力.

四、巩固提高

1. 作业本 A:

教学实录:探索勾股定理(一)

246600 安徽省岳西县城关中学 李庆社

一、创设问题情境, 引入新课

出示投影片(§1.1.1 A)

(1) 三角形按角分类, 可分为________、________、________.

(2) 对于一般的三角形来说, 判断它们全等的条件有哪些? 对于直角三角形呢?

(3) 有两个直角三角形, 如果有两条边对应相等, 那么这两个直角三角形一定全等吗?

生答(略).

这节课, 我们就来继续研究直角三角形.

二、讲述新课

1. 问题串

[师] (出示投影片§1.1.1 B)

观察下图, 并回答问题:

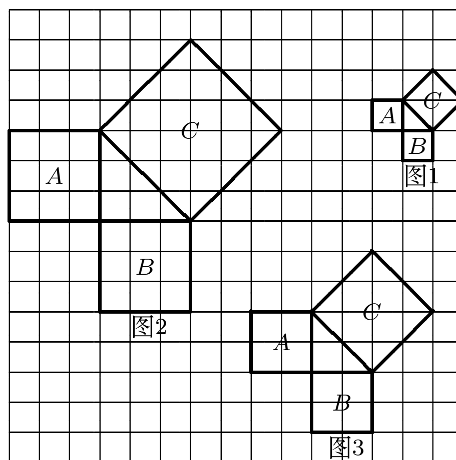
(1) 观察.

在图1中, 正方形A中含有_____个小方格, 即A的面积是_____个单位面积;

正方形B中含有_____个小方格, 即B的面积是_____个单位面积;

正方形C中含有_____个小方格, 即C的面积是_____个单位面积.

(2) 在图2、图3中, 正方形A、B、C中各含有多少个小方格? 它们的面积各是多少个单位面积? 你是如何得到上述结果的? 与同伴交流.



(3) 请将上述结果填入下表, 你能发现正方形A、B、C的面积关系吗?

	A的面积(单位面积)	B的面积(单位面积)	A的面积(单位面积)
图1			
图2			
图3			

生答(略).

2. 做一做

出示投影片(§1.1.1 C)

(1) 观察图4、图5.

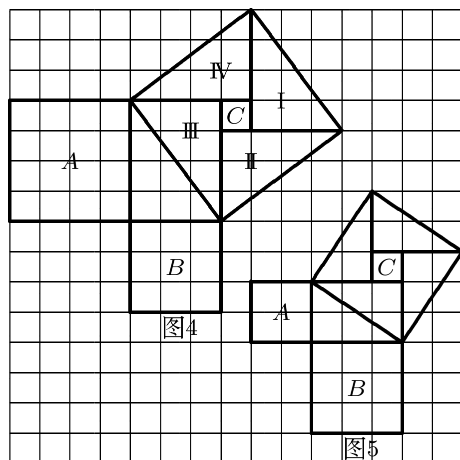
---

2. 实践应用: 请你收集生活中是轴对称图形的商标.

课后总体评析:

1. 本节课从学生原有生活知识经验着手, 通过学生的画、剪、拼等动手实践操作活动, 让学生主动地探索和发现新知识, 如: 剪纸、时间显示问题、墨水实验及“L”型图形变成轴对称图形的操作等, 真正引导学生经历了“做数学的过程”. 这样, 既激发学生的学习兴趣, 培养学生动手操作技能和归纳想象能力, 更培养学生主动获取新知识的能力.

2. 本堂课营造了“自主探索, 合作交流”的氛围. 教师调动学生主动参与、自主探索和合作交流, 无论是布置探索内容, 还是参与讨论、协调学生之间的交流、及时鼓励评价学生等方面, 教师的角色已经发生了很大的变化, 由原来的指导者转变为组织者、引导者和活动的配合者.



并填写下表:

	A的面积(单位面积)	B的面积(单位面积)	A的面积(单位面积)
图4			
图5			

你是怎样得到上面结果的? 与同伴交流.

(2) 三个正方形A、B、C的面积之间有何关系?

让学生先独立思考, 然后填写上面的表格, 最后以小组为单位充分交流各自的想法, 特别是在计算斜边上的正方形的面积即正方形C的求法.

[师生共析] 根据图4、图5可填表如下:

	A的面积(单位面积)	B的面积(单位面积)	A的面积(单位面积)
图4	16	9	25
图5	4	9	13

我们先来观察图4, 不难看出A、B分别含有16个小方格、9个小方格, 所以A、B的面积分别为16个单位面积、9个单位面积, 但斜边上的正方形C的面积的计算较为复杂, 我们可用以下几种方法求得:

第一种方法: 将正方形C分割成4个直角边长分别为3、4全等的直角三角形和中间的一个小方格, 利用计算三角形面积的公式可得正方形C的面积为 $4\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\right)+1=24+1=25$个单位面积.

第二种方法: 直接数正方形C中含有多少个小方格, 但需要适当地拼凑, 在第一种方法中, 我们将正方形分割成5部分, 直角三角形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ和一个小方格, 其中直角三角形Ⅰ、Ⅲ可拼凑成一个长和宽分别为3和4的长方形, 含有12个小方格, 同理Ⅱ、Ⅳ也可拼凑成12个小方格, 所以正方形C中共有$12+12+1=25$个小方格, 即C的面积为25个单位面积.

第三种方法: 可将直角三角形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ沿正方形C的边外翻, 就得到一个边长为7个单位长度的正方形, 这时正方形C的面积就为$(49-1)\div2+1=25$个单位面积.

图5与图4同理.

我们从上表不难发现$16+9=25$, $4+9=13$, 即C的面积$=A$的面积$+B$的面积.

[师] 图4和图5中的三个正方形A、B、C也是由中间的直角三角形"长"出来的, 你能从三个正方形的面积关系与直角三角形的三边关系找出它们的联系吗?

[生] 图4中的正方形A、B、C的面积分别是直角三角形两条直角边的平方和斜边的平方, 根据三个正方形的面积关系, 我们不难发现, 在这个直角三角形中, 两条直角边的平方和等于斜边的平方. 由图5我们也可得出同样的结论.

3. 议一议

[师] 我们通过对前面几个直角三角形的讨论、分析, 你能归纳出直角三角形三边长度存在的关系吗? 用自己的语言表达你的重大发现并与同伴交流.

[生]在直角三角形中, 两条直角边长度的平方和等于斜边的平方.

[师]这是由前面几个特例猜想出来的, 是否合理呢? 我们不妨作几个直角三角形检验一下. 例如, 作一个分别以5厘米、12厘米为直角边的直角三角形, 然后测量斜边的长度, 通过计算看一下直角三角形三边的规律还成立吗?

[生] 1. 作一个直角$\angle MCN$;

2. 以C为圆心, 分别以5厘米、12厘米为半径画弧交CM、CN于点A、B;

3. 连结AB.

用刻度尺量出斜边AB的长度(强调注意测量的误差)为13厘米. 经检验斜边$AB^2=$

$13^2 = 169$, 两直角边平方和 $AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. 即两直角边的平方和等于斜边的平方(图略).

[师] 很好. 同学们不妨多作几个不同的直角三角形, 用上面的方法检验直角三角形三边的关系.

[师生共析] 通过特例猜想、检验, 我们不难发现, 直角三角形的三边的规律是成立的, 这就是我们将要介绍的重点内容——勾股定理: 如果直角三角形两直角边分别为 a、b, 斜边为 c, 那么 $a^2 + b^2 = c^2$, 即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

4. 读一读 (课本 P.5) (略)

5. 想一想

[师] 小明的妈妈买了一台 29 英寸 (74 厘米) 的电视机. 小明量了电视机的荧屏后, 发现荧屏只有 58 厘米长和 46 厘米宽, 他觉得一定是售货员搞错了, 你同意他的想法吗? 你能解释这是为什么吗?

[生 1] 我听爸爸说过, 29 英寸或 74 厘米的电视机, 是指荧屏对角线的长度, 而不是其长或宽.

[生 2] 可是, 连结荧屏的对角线将长方形的荧屏分成全等的两个直角三角形. 根据勾股定理, 长^2+宽$^2 = 74^2$, 可 $58^2 + 46^2 \neq 74^2$, 这是为什么呢?

[生 1] 因为荧屏边框遮盖了一部分, 所以实际测量存在一些误差.

[师] 的确如此, 但这里我们要知道一个生活常识, 29 英寸 (74 厘米) 指的是荧屏的对角线的长度, 而非荧屏的长或宽.

6. 例题讲解

例　在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

(1) 若 $a = 8$, $b = 6$, 则 $c =$ ________;

(2) 若 $c = 20$, $b = 12$, 则 $a =$ ________;

(3) 若 $a : b = 3 : 4$, $c = 10$, 则 $a =$ ________, $b =$ ________.

[师生共析]

分析: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 所以有关系: $a^2 + b^2 = c^2$. 在此关系式中, 涉及到三个量, 利用方程的思想, 可"知二求一".

解: 根据题意可得 $a^2 + b^2 = c^2$.

(1) 若 $a = 8$, $b = 6$, 所以 $8^2 + 6^2 = c^2$. 即 $c^2 = 100$, $c > 0$, 所以 $c = 10$;

(2) 若 $c = 20$, $b = 12$, 所以 $a^2 + 12^2 = 20^2$, 即 $a^2 = 20^2 - 12^2 = (20+12)(20-12) = 32 \times 8 = 16^2$, $a > 0$, 所以 $a = 16$;

(3) 若 $a : b = 3 : 4$, 可设 $a = 3x$, $b = 4x$, 所以 $(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2$.

化简, 得 $9x^2 + 16x^2 = 100$, $25x^2 = 100$, $x^2 = 4$, $x = 2\,(x > 0)$,

所以 $a = 3x = 6$; $b = 4x = 8$.

评注: 综合上述解法可以发现, 形 (即 $\triangle ABC$ 为直角三角形) 与数 ($a^2 + b^2 = c^2$) 的统一, 所以我们说勾股定理是形与数的结合.

三、课时小结

先由学生自己总结, 然后师生共同完成. 这节课我们主要研究:

1. 从特例猜想出勾股定理;

2. 用特例检验了勾股定理;

3. 简单了解了勾股定理的应用.

四、课后作业

1. 课本 P.6, 习题 6.1.

2. 到网上或图书室查阅关于勾股定理的资料.

五、活动与探究

有一根长 70 cm 的木棒, 要放在长、宽、高分别是 50 cm、40 cm、30 cm 的木箱中, 能放进去吗?

过程: 在实际生活中, 工程设计方案往往比较多, 应用所学的知识进行计算方可解决, 而此题正是需要我们大胆实践和创新, 用我们学过的勾股定理和丰富的空间想象力来解决. 我们可注意到木棒虽比木箱的各边都长, 按各边的大小放不进去, 但木箱是长方体, 可以利用空间的最长长度, 如 AC'.

结果: 由图 6 可得, $AA' = 30\,\text{cm}$, $A'B' = 50\,\text{cm}$, $B'C' = 40\,\text{cm}$. $\triangle A'B'C'$、$\triangle AA'C'$ 都为直角三角形. 由勾股定理得 $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$. 在 Rt$\triangle AA'C'$ 中, AC' 最长, 则

立足“视图” 重视考查“空间观念”

362300 福建省南安市教师进修学校 潘振南

2001年9月进入国家级的38个基础教育课程改革实验区的学生, 2004年已初中毕业, 其中有17个实验区根据新课标进行中考单独命题, 单独计划招生, 其命题思路、形式、立意肯定会对今后其它地区中考试题的命题产生较大的积极影响. 为此, 笔者从收集到的十几份实验区数学试卷进行探究, 从中发现, 它们基本杜绝了生搬硬套、纯粹背记、机械计算的试题, 不出繁难偏旧、人为编造的计算题、证明题, 试题精彩纷呈, 亮点诸多. 值得一提的是有关“视图”的考题引人注目, 它们立足“视图”, 高于“视图”, 有效地考查了学生的空间观念. 现将此类考题进行归纳、整理、分析, 期望抛砖引玉, 与同行交流共享.

一、从“几何体”到“三视图”

例1 (河北省鹿泉市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 图1中几何体的主视图是……………………………………………………( )

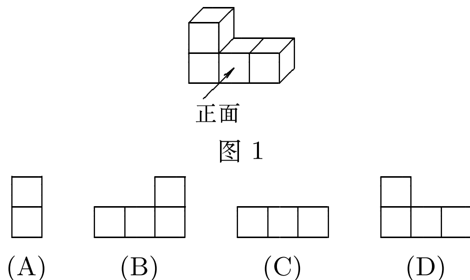


图 1

例2 (四省区灵武、开福、曲沃、乌海实验区2004年初中毕业生学业考试题) 小明从正面观察图2所示的两个物体, 看到的是……( )

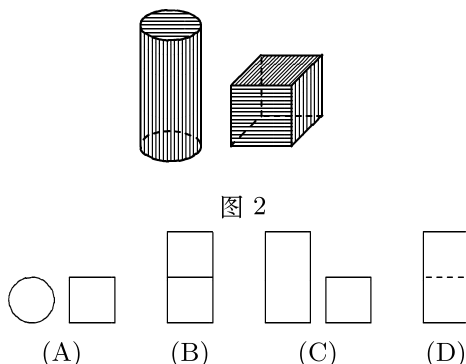


图 2

例3 (四川省成都市郫县实验区2004年初中毕业生学业考试题) 将图3所示放置的一个直角三角形$ABC\,(\angle C=90^\circ)$绕斜边AB旋转一周, 所得到的几何体的正视图是下面四个图形中的 ……………………………………………( )

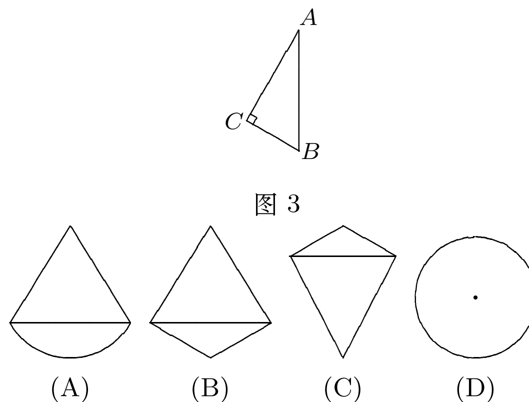


图 3

简析: 与原大纲相比, 新课标增加了“视图和投影”的学习内容, 其意图是通过二维与

$AC'^2=AA'^2+A'B'^2+B'C'^2=30^2+40^2+50^2=5000>70^2.$

故70 cm的棒能放入长、宽、高分别为50 cm、40 cm、30 cm的木箱中.

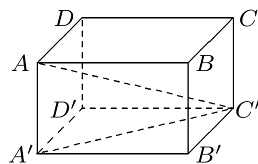


图 6

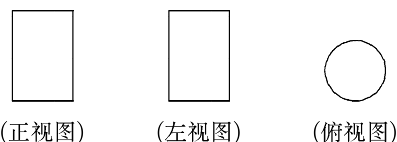
三维图形的联系和转换，发展学生的空间观念.课标要求“会判断简单物体的三视图”，即要求学生在给出简单物体(几何体)的条件下，从一组三视图中将指定的简单物体(几何体)的三视图选出来，这是课标对“视图”的最基本要求.由此可见，例1、例2的考查是符合课标的最基本要求，属于“送分题”的类型，而例3稍微提高一点难度，不是直接给出这个几何体，而是给出一个直角三角形平面图，但考生只要先把平面图形“动起来”，在头脑中旋转一周后，想象出所得到的几何体，也就能确定这个几何体的三视图.

二、从“三视图”到“几何体”

例4 (深圳市南山实验区2004初中毕业生学业考试题) 某物体的三视图是如图4所示的三个图形，那么该物体形状是 ……………( )

(A) 长方体; (B) 圆锥体;

(C) 正方体; (D) 圆柱体.



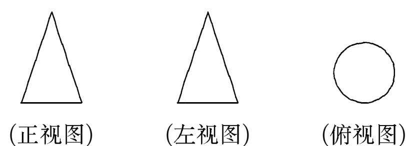
(正视图) (左视图) (俯视图)

图 4

例5 (深圳市南山实验区2004年初中毕业生学业考试副题) 物体的三视图是如图5所示的三个图形，那么该物体形状是 …………( )

(A) 长方体; (B) 正方体;

(C) 圆锥体; (D) 圆柱体.



(正视图) (左视图) (俯视图)

图 5

例6 (广西省南宁市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 下列图6的主视图和俯视图对应下面的哪个物体 ……………………………( )

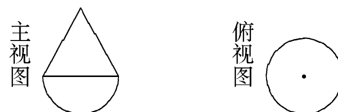
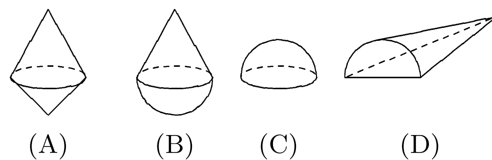


图 6

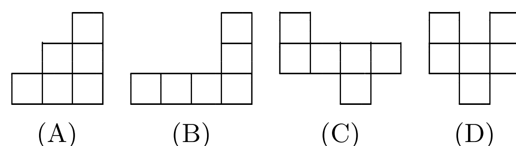


(A) (B) (C) (D)

简析: 课标在要求学生“会判断简单物体的三视图”的同时，紧接着提出“能根据三视图描述基本几何体或实物原型”，而对“基本几何体”所包括的范围，课标特别注明是指直棱柱、圆柱、圆锥、球. 由此可见例4、例5、例6较准确地把握了课标的要求，着眼基础，面向大多数学生，题目难度不大，容易入手，突出了数学教育面向全体学生，体现了“人人学有价值的数学，人人都能获得必需的数学”的教育新观念.

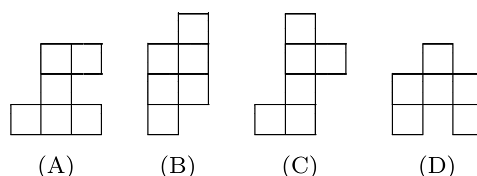
三、从“正方体”到“平面展开图”

例7 (黑龙江省宁安市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 下列各图中，可以是一个正方体的平面展开图的是 ……………………( )



(A) (B) (C) (D)

例8 (海南省海口市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 下面的平面图形中，是正方体的平面展开图的是 …………………………( )



(A) (B) (C) (D)

简析: 课标要求学生“能根据展开图判断和制作立方体模型”、“了解基本几何体与其三视图、展开图(球除外)之间的关系”. 对于例7、例8这样的考题，学生可通过排除法，一一折叠验证，从而选出正确答案. 在折叠验证时，学生要经历观察、想象、比较、综合、抽象分析的过程，所以这类考题能有效地考察学生对空间与平面相互关系的理解和把握程度.

四、从“视图”到“计算推理探究”

例9 (山东省青岛市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 观察下列由棱长为1的小正方体摆成的图形，寻找规律:

如图7(1)中, 共有1个小立方体, 其中1个看得见, 0个看不见; 如图7(2)中, 共有8个小立方体, 其中7个看得见, 1个看不见; 如图7(3)中, 共有27个小立方体, 其中19个看得见, 8个看不见; ……, 则图7(6)中, 看不见的小立方体有________个.

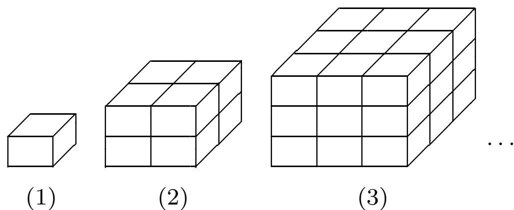


图 7

简析: 这道"视而不见"的考题, 形式新颖, 活泼有趣. 学生要通过观察、探索、猜想、验证, 从而找出规律, 才能完成解答(答案是: 125个). 该题不仅考查了学生几何知识的灵活运用, 同时也考查了学生的空间想象能力和判断推理能力.

例10 (贵州省贵阳市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 棱长是1厘米的小正方体组成如图8所示的几何体, 那么这个几何体的表面积是 ……………………………………( )

(A) 36平方厘米; (B) 33平方厘米;

(C) 30平方厘米; (D)27平方厘米.

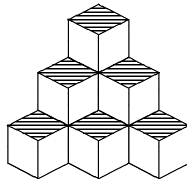


图 8

简析: 该题以"凹凸不平"、"错落有致"的几何体为背景, 不仅考查学生对"表面积"这个概念的理解是否透彻, 同时考查了学生的观察能力和空间想象能力(答案: 选(A)).

例11 (青海省湟中县实验区2004年初中毕业生学业考试题) 图9是由一些相同的小正方体构成的几何体的三视图, 这些相同的小正方体的个数是 ……………………………( )

(A) 4个; (B) 5个; (C) 6个; (D) 7个.

简析: 学生要回答这个问题, 必须多次进行"如果……, 那么……"的思考, 把四个选择支一一尝试, 才能得出正确的结论. 要经历典型的数学解决问题过程: 提出假设, 得出一个结论, 证实或否定这个结论. 这里虽然没有严密的命题逻辑和演绎推理, 但与直观结合的思考, 合情地推理, 照样能得出正确的结论, 这是发展学生空间观念的必经之路(答案: 选(B)).

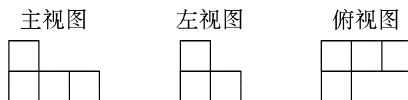


图 9

例12 (贵州省贵阳市实验区2004年初中毕业生学业考试题) 由一些大小相同的小正方体组成的简单几何体的主视图和俯视图, 如图10所示.

(1) 请你画出这个几何体的一种左视图;

(2) 若组成这个几何体的小正方体的块数为n, 请你写出n的所有可能值.

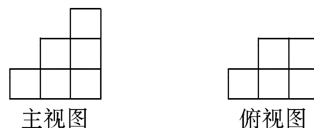


图 10

简析: 这是一道具有开放性、探索性、综合性的试题. 形式新颖, 但有一定难度, 学生要依据图形的特点和"视图"的基本知识, 寻找符合要求的图形. 考查了学生读图、识图、获取信息的基本能力, 观察、分析图形的能力. 需要学生自己探索与研究, 寻找其中存在的规律(答案: $n = 8,9,10,11$).

此外, "视图"是与"投影"一起作为课标的新增内容(见数学课标实验版P.40), "视图"的内容在这些考卷被涉及到了, 被命题者重视了, 而"投影"的知识内容在所有的考卷中都难以找到, 甚至有的新教材也忽略漏编了, 这要引起我们的关注与探讨. 另外, 计算器已允许进考场了, 那么学生平时学习"视图"的学习用具, 如小正方形模具、纸皮等是否也可以进考场? 学生在考场作答时, 如果是通过摆弄这些"学具"来完成解答的, 是否属于作弊、违规行为? 这些问题, 都需要进一步的探讨.

图形分割问题

200125 上海市浦东新区教育学院实验中学 闵 晟

所谓图形分割, 就是在保持面积不变的前提下, 将一个或几个图形分割成两个或几个图形. 这类问题贴近生活, 有较强的趣味性, 它既需要动手实践, 又需要动脑，容易吸引学生的注意, 有利于培养学生的学习兴趣和学习的热情. 下面介绍解答此类问题的几种比较典型的策略.

策略一. 利用图形的对称性

1. 利用图形的轴对称性

例1 (2003年泰州市中考试题) 为了美化环境, 需在一块正方形空地上分别种植四种不同的花草. 现将这块空地按下列要求分成四块: (1) 分割后的整个图形必须是轴对称图形; (2) 四块图形的形状相同; (3) 四块图形的面积相等. 请你按照上述三个要求, 分别在下面三个正方形中, 给出三种不同的分割方法(只要求正确画图, 不写画法).

分析: 正方形是轴对称图形, 它有四条对称轴, 因此可以得到下面的三种分割方法. 如图1、图2、图3.

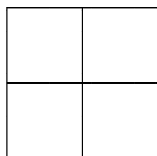


图 1

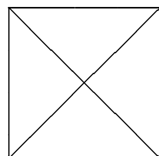


图 2

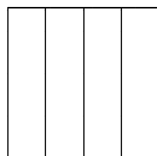


图 3

2. 利用图形的中心对称性

例2 如图4, 有大小两个矩形. 作一直线将整个图形分成面积相等的两部分.

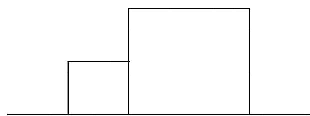


图 4

分析: 对于任何一种中心对称图形, 过对称中心的任何直线均可以将它平分为二. 显然, 矩形是中心对称图形. 我们只需过两个矩形的对称中心作直线l就可以将两个矩形分成面积相等的两部分 (如图5).

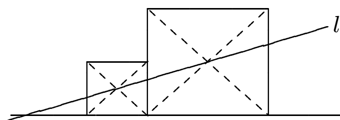


图 5

事实上, 对于例1, 如果我们同时从图形的轴对性和中心对称性出发结合起来考虑, 可以通过下面的步骤得到无数种作法:

(1) 先利用正方形的轴对称性将它分成两个小矩形 (图6);

(2) 再利用矩形的中心对称性, 任意作一直线将它平分 (图7);

(3) 再作 (2) 中的直线关于正方形的对称轴的对称直线 (图8).

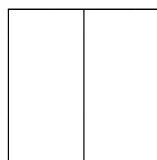


图 6

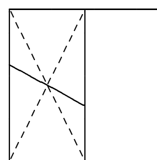


图 7

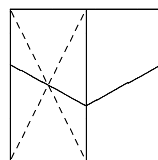


图 8

初中阶段所学到的几何图形中, 具有对称性的图形很多, 充分利用图形的对称性, 正是解答问题的有力工具之一.

策略二. 利用面积关系

例3 (2004年山东烟台市中考试题) 如图9, 现有两个边长比为1:2的正方形$ABCD$与$A'B'C'D'$. 已知点B、C、B'、C'在同一直线上, 且点C与B'重合, 请你利用这两个正方形, 通过截割、平移、旋转的方法, 拼出两个相似比

为1:3的三角形.

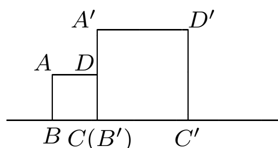


图 9

分析: 由于是等积变形, 因此不妨设小正方形的边长为1, 则大正方形的边长为2, 两者的面积之和为$1^2+2^2=5$, 而所要分割成的两个三角形相似且相似比为1:3, 根据相似三角形的性质, 则小三角形的面积为$\frac{1}{2}$. 所以, 首先可考虑将小正方形平分就可以得到这样的小三角形, 如此就可以得到方法一(如图10), $\triangle ABD$和$\triangle EBC'$即为所要求的三角形.

更进一步, 只要在BC边上任取一点P, 连接AP、DP, 再将$\triangle ABP$平移至$A_1C'P'$处(A与A_1重合, B与C'重合, P与P'重合), 最后延长PD、$P'A_1$交于E. 可以证明: $\triangle APD$与$\triangle EPP'$即为符合条件的三角形(如图11).

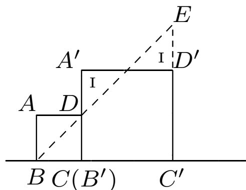


图 10

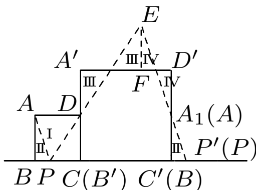


图 11

从面积入手, 利用图形分割中面积的不变性, 结合相似三角形的性质或其它性质, 正是解答此题的有力途径.

策略三. 利用角之间的大小关系

例4 如图12, 有两个直角三角形$\triangle ABC$和$\triangle DEF$, 且$\angle B>\angle E$, $\angle C=\angle F=90°$.

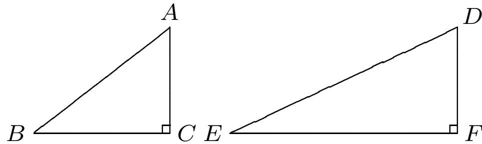


图 12

请在每个三角形中作一条直线, 将每个三角形分成两个小三角形, 且它们分别相似.

分析: 由于两个相似三角形必有两个角对应相等, 显然, $\angle C=\angle E+\angle D$, $\angle F=\angle A+\angle B$. 故可把$\angle C$、$\angle F$分别分成对应的小角, 作$\angle BCM=\angle E$, $\angle EFN=\angle B$ (图13). $\triangle BCM\backsim\triangle FEN$, $\triangle ACM\backsim\triangle FDN$.

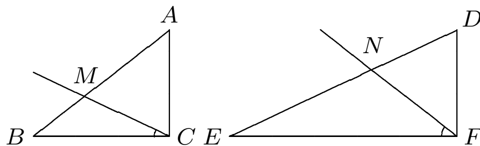


图 13

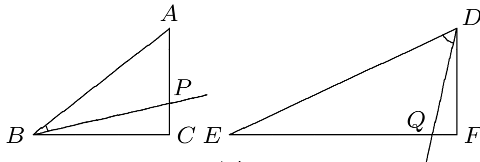


图 14

同样, $\angle A+\angle B=\angle D+\angle E\Longrightarrow\angle B-\angle E=\angle D-\angle A$. 可作$\angle ABP=\angle E$, $\angle EDQ=\angle A$(图14). $\triangle ABP\backsim\triangle DEQ$, $\triangle CBP\backsim\triangle FQD$.

总之, 图形分割问题看起来容易, 做起来难, 但只要我们抓住问题的关键, 善于分析, 就能找到解题的途径和方法.

以下介绍几题可供练习参考:

练习1 (2004年安徽中考试题) 将任意一个三角形分割成一个矩形.

练习2 (2004年泉州市中考试题) 现有一个边长为60的正方形. 请将它的四个角各割去一个矩形, 其余部分不变, 将它折成一个有盖的盒子, 且盒子的底面积为800. 请设计一种分割方法, 并求盒子的高(图略).

练习3 (2004年南通市中考试题)如图15, 菱形公园内有四个景点, 请你用两种不同的方法, 按下列要求设计成四部分: (1) 用直线分割; (2) 每个部分各有一个景点; (3) 各部分的面积相等.

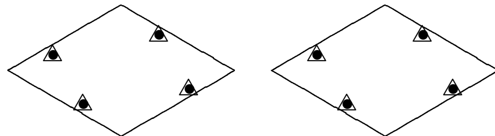


图 15

练习4 将任意一个四边形分割成一个三角形.

指导学生数学阅读的若干方法

200124 上海市三林中学 高国平

数学阅读是指在数学学科内开展阅读的学习活动. 数学阅读教学也就是组织学生阅读数学课本, 培养学生阅读能力、学会学习的教学.

在我们平时的数学教学中, 比较注重数式的演算步骤、解题的方法与技巧, 而忽视对数学阅读的指导. 可是随着现代科技日益渗透到人们的生活, 社会越来越数学化、数字化, 不具备数学阅读能力是不行的. 近年来, 阅读理解题成了考试中的新亮点. 如 2001年上海高考数学试卷21、22题, 2002年第20题, 2004年第16题等等, 具有很强的选拔功能. 很多学生对此类题感到困惑, 难以下手, 很大程度上是由于阅读能力差导致的. 新的《高中数学课程标准》中已将数学阅读设定为专题课, 旨在促进学生阅读自学, 帮助学生形成独立思考的习惯. 因此数学教学必须重视数学阅读. 充分利用阅读的形式, 培养学生的阅读、理解、分析能力.

在数学阅读教学中如何帮助学生提高阅读能力和理解分析能力呢? 我的体会是:

1. 教师与学生应重视数学阅读, 认识到数学阅读的价值. 教师在阅读教学中应该是阅读学习的促进者、引导者、阅读课程的开发者, 这样就使教师能主动地将数学阅读纳入到课堂教学环节中.

2. 要尽可能给学生提供数学阅读材料和阅读时间, 让学生慢慢养成数学阅读习惯. 要循序渐进, 使学生在数学阅读中逐步达到愿读、会读、乐读三种境界.

3. 在阅读前教师应对阅读材料中的重点、难点和关键要害问题, 列出提纲或编制思考题引发学生阅读兴趣. 带着一定的问题去读, 可以使学生从机械阅读向意义阅读转化. "学贵有疑, 小疑则小进, 大疑则大进, 疑者觉悟之机也, 一番觉悟一番长进". 在学生阅读之前, 教师如果适当地创设一些难度适当的问题情境, 则可以诱发和保持学生的阅读兴趣.

例如诱导公式这堂课, 这一节内容要求学生掌握求任意角的三角函数值的方法, 目的就是怎样把任意角的三角函数值转化为$0^\circ\sim 90^\circ$之间的角的三角函数值, 然后查表求出.

阅读提纲:

(1) 利用哪个公式, 可以把任意角转化为$0^\circ\sim 360^\circ$间的角?

(2) 利用哪个公式, 可以把$90^\circ\sim 360^\circ$间的角转化为 $0^\circ\sim 90^\circ$间的角?

(3) $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$, $\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$这组公式的推导过程是怎样进行的? 其中角$\alpha$的取值范围有限制吗?

(4) 教材中的诱导公式(一)和(二)有何应用?

(5) 求$\sin 930^\circ$、$\cos(5+7\pi)$、$\tan 1540^\circ$的值.

按照提纲要求几个问题解决了, 本节课的基本知识也就掌握了.

4. 由于数学语言的高度抽象性、严谨性、精确性, 尤其是符号语言和图式语言跟自然语言差别很大, 因此数学阅读要求认真细致、反复推敲、勤思多想. 在阅读中要注意内部言语的转化过程, 灵活转化阅读内容, 如把一个抽象的内容转化为具体的或不那么抽象的内容; 把用符号语言或图式语言表述的关系转化为文字的语言的形式, 及把文字语言表述的关系转化为符号或图式语言; 用自己的语言来理解定义或定理等. 例如2004年北京高考数学19

利用向量解决点到平面的距离问题

200433 上海市复旦大学附属中学 杨丽婷

[点评]

为了配合上海市第二期课改, 要求参加试点学校复旦附中, 根据高三数学新教材(理科)内容, 上一堂示范课, 以展示对新教材的理解和安排. 复旦附中高三数学青年教师杨丽婷老师就新教材中的向量应用上了一堂“利用向量解决点到平面的距离问题”. 杨老师与学生共同探讨能否将以前学过的利用向量求点到直线的距离方法迁移到解决点到平面的距离问题上来, 若能, 是怎样“能”; 若不能, 又为什么? 怎样才“能”? 以启发思维温故知新, 并从数学思想方法上点明向量之所以能成为广泛应用的工具, 是由于图形、向量和坐标运算相辅相承三位一体, 进一步加强了数形结合和化归思想, 深得听课者好评. 为此, 特推荐发表以飨广大读者. ——上海市复旦附中特级教师 曾容

[教学过程]

师: 我们学习过向量, 把既有大小又有方向的量称为向量, 向量本身就是一个几何概念; 我们也学习过复数, 知道复数可以用向量表示, 并且能够进行运算. 由于复数与向量的密切联系, 也促进了向量的代数化和坐标化; 我们还学习过解析几何, 知道解析几何就是坐标几何, 即建立坐标系, 使得点具有坐标, 利用坐标的代数性质, 去研究图形的几何性质; 解析几何开创了代数方法研究几何问题的新纪元, 也使

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

题: 某段铁路线上依次有A、B、C三站, $AB=5\text{km}$, $BC=3\text{km}$, 在列车运行时刻表上, 规定列车8时整从A站正点发车, 8时07分到达B站并停车1分钟. 8时12分到达C站. 在实际运行时, 假设列车从A站正点发车, 在B站停留1分钟, 并在行驶时以同一速度$v\text{km/h}$匀速行驶, 列车从A站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差. (1) 分别写出列车在B、C两站的运行误差; (2) 若要求列车在B、C两站的运行误差之和不超过2分钟, 求v的取值范围.

这里考核要求就是通过阅读, 把文字语言与符号语言互相转释: (如表一).

根据阅读材料的信息进行语言转化, 这是阅读理解的关键, 也是解题的关键.

5. 阅读过程中动手与动脑结合, 一边看材料, 一边动手演算, 要边看材料, 边对输入大脑中的阅读文字、信息进行识别加工, 对材料进行抽象、概括、分析、综合、归纳、猜测, 从而

表 一

文字语言	符号语言	文字语言
8时从A站发车, 8时07分到B站.	$t_1=7$ (分钟).	时刻表上到B站相应时间.
8时12分到达C站.	$t_2=12$ (分钟).	时刻表上到C站相应时间.
速度$v\,\text{km/h}$, $AB=5\,\text{km}$.	$T_1=\dfrac{300}{v}$(分钟).	A站到B站实际时间.
速度$v\,\text{km/h}$, $AC=8\,\text{km}$, B停1分钟.	$T_2=\dfrac{480}{v}+1$ (分钟).	A站到C站实际时间.
A到B的时间与时刻表时间之差的绝对值.	$\|T_1-t_1\|$.	A站到B站运行误差.
A到C的时间与时刻表时间之差的绝对值.	$\|T_2-t_2\|$.	A站到C站运行误差.
两站运行误差之和不超过2分钟.	$\|T_1-t_1\|+\|T_2-t_2\|\leqslant 2$.	

将新知识纳入到自己已有的认知结构中.

6. 阅读后应及时交流、小结. 阅读完一章一节后, 教师与学生, 学生与学生进行多向交流, 对所学的知识进行归纳小结, 要理清脉络, 疏通思维, 消除障碍, 与所学过的内容进行比较, 形成正确概念.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

得数形进一步结合. 的确, 数形结合使得向量的应用更为广泛, 而向量的坐标表示也使得数形结合更为密切 (以上过程简要说明了为什么可以利用向量解决几何问题以及如何解决).

例如, 学习解析几何时, 我们在已知点的坐标和直线方程的情况下, 借助向量这一工具, 利用向量的坐标表示, 而得到了点到直线的距离公式 (大家可以回顾一下我们当初是如何得到公式的).

而如今, 我们研究点到平面的距离问题可不可以同样利用向量, 用先前研究点到直线的距离同样的方法而得到点到平面的距离呢?

生: 答案是否定的, 因为我们之所以可以利用向量解决点到直线的距离问题, 关键在于已知条件——点的坐标和直线的方程, 倘若我们可以用同样的方法解决点到平面的距离, 则已知必须是一样的, 即已知点的坐标和平面的方程, 建立坐标系可以得到点的坐标, 但是平面的方程却不得而知, 所以我们不可以依葫芦画瓢, 用先前解决点到直线距离的方法来解决点到平面的距离.

师: 怎么办呢? 用什么样的方法来解决点到平面的距离呢?

首先我们想想看, 在点到直线的距离问题中, 直线方程的作用是什么?

生: 是用来确定直线的位置.

师: 对!而直线的位置一定要通过直线方程来确定吗?

生: 不是! 还可以通过直线上的一点和直线方向来确定直线的位置.

师: 已知直线的法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b)$ 和直线上某一定点 $M(x_1,y_1)$, 直线外一点 $A(x_0,y_0)$, 求点 A 到该直线的距离 d. 如何求呢?

生: 如图1, 连接 AM, 设 $\angle MAB=\theta$, $d=|AB|=|AM|\cos\theta$, $|AM|$ 已知, 现在只要用已知条件表示出 $\cos\theta$, 即 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right||\overrightarrow{n}|}$, 所以 $d=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$.

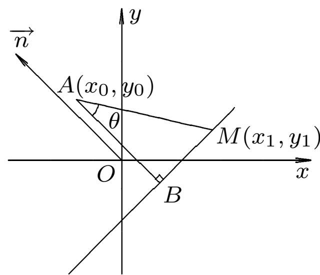


图 1

师: 而事实上利用向量数量积的几何意义 $|AM|\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$, 直接就可以得出该公式, 再利用向量的坐标表示就可以得出点到直线的距离公式.

师: 回到我们要解决的问题上来, 刚才因为不知道平面的方程使得点到平面的距离没法解决. 而如今, 我们想想看, 平面方程的作用是什么?

生: 确定平面的位置.

师: 对! 确定平面的位置也不一定需要知道平面的方程! 可以通过确定平面上一定点和平面的方向来确定平面的位置. 即已知平面的法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$, 平面上某一定点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 和平面外一点 $A(x_0,y_0,z_0)$ (如图2), 求点 A 到该平面的距离 d. 如何求呢?

生: 类似于求点到直线的距离, 也可以得到公式 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$.

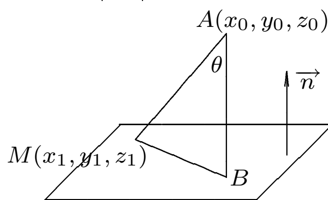


图 2

例1 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2, E、F、G 分别是 CC_1、D_1A_1、AB 的中点, 求点 A 到平面 EFG 的距离.

解: 如图3, 建立空间直角坐标系, 得 $E(0,2,1)$、$F(1,0,2)$、$G(2,1,0)$、$A(2,0,0)$, $\overrightarrow{EF}=(1,-2,1)$, $\overrightarrow{EG}=(2,-1,-1)$.

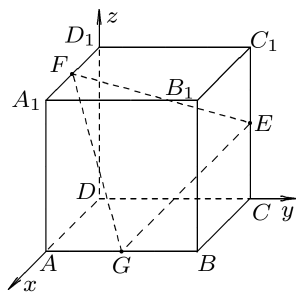


图 3

设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=z,$$

所以 $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{GA}=(0,-1,0)$,

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

师: 通过该例题我们体会到:

① 利用这一公式再依靠向量的坐标运算可以方便地算出点到平面的距离, 而且通过例题讲解可体会到“图形、向量、坐标运算三位一体”.

② 这一公式不仅解决了点到直线的距离、点到平面的距离, 还可以解决直线与平面的距离问题(直线与平面平行)和平面与平面距离的问题(平面与平面平行), 体现了数学的“化归思想”.

所以应该将这个结果和推导过程合理地应用在解题中.

例2 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1=2$, $AB=1$, $AD=3$, P、Q 分别为 BC、CD 的中点.

(1) 求 BD 到平面 C_1PQ 的距离;

(2) M、N 分别为 A_1B_1、A_1D_1 的中点, 求平面 C_1PQ 和平面 AMN 间的距离.

解: 建立空间直角坐标系如图4所示.

(1) $P\left(0,\frac{3}{2},0\right)$、$Q\left(\frac{1}{2},0,0\right)$、

$C_1(0,0,2)$、$B(0,3,0)$、$D(1,0,0)$,

$\overrightarrow{C_1P}=\left(0,\frac{3}{2},-2\right)$, $\overrightarrow{C_1Q}=\left(\frac{1}{2},0,-2\right)$.

设平面 PC_1Q 的法向量 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, 则

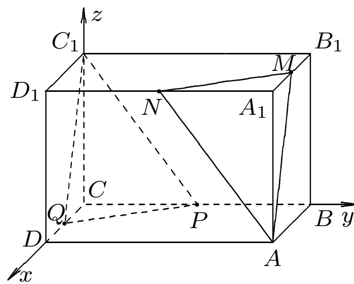


图 4

$$\begin{cases} \frac{3}{2}y-2z=0 \\ \frac{1}{2}x-2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{4}{3}z \\ x=4z, \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{n}=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$. 而 $\overrightarrow{BD}=(1,-3,0)$, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n}=0$, 所以直线 BD 与平面 PC_1Q 平行, $\overrightarrow{BP}=\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$, $d=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}}=\frac{6}{13}$.

(2) 同样可以利用两个平面的法向量平行来证明两个平面平行. $A(1,3,0)$、$C_1(0,0,2)$, $\overrightarrow{AC_1}=(-1,-3,2)$, $\overrightarrow{n}=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$,

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}}=\frac{18}{13}.$$

例3 已知 E、F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 BC、DD_1 的中点, 若正方体的棱长为1, 求四面体 $A-B_1EF$ 的体积.

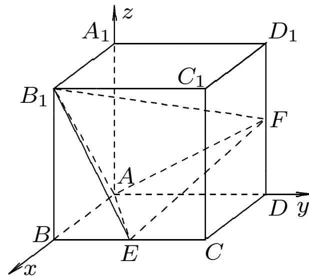


图 5

解: 建立空间直角坐标系如图5所示, 得

(下转第3–44页)

关于二元函数条件极值问题的教学实录

201101 上海市七宝中学 申志莲

在高三复习“求函数最值的常用方法”这一知识点时, 我精选例题, 通过一题多解, 收到了良好的教学效果.

1. 教学目标

知识目标: 掌握求函数最值的一些常用方法.

能力目标: 通过一题多解, 培养学生的发散思维和归纳能力以及加深对数形结合思想、转化换元思想等的理解与运用.

素质目标: 通过一题多解, 尤其是各类知识点的综合运用, 渗透事物之间是相互联系的, 事物的不同方面在一定条件下是可以相互转化等辩证唯物主义观点.

教学重点: 掌握求函数最值的常用方法.

教学难点: 各种方法的合理选择, 学生解题中含混的概念和错误的纠正, 数学思想的渗透.

2. 教学过程

2.1 给出例题, 探求一题多解

例题 已知$x+2y=2\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$, 求$x^2+y^2$的最值.

T: 思考: 想出尽可能多的解法来求解.

S_1: (解法一): 以$x=2-2y$代入x^2+y^2, 得$(2-2y)^2+y^2=5y^2-8y+4$, 配方得$5\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}$, 又由$y\geqslant 0$, 所以$x^2+y^2$最小值为$\dfrac{4}{5}$, 没有最大值.

T: 非常好, 将已知条件代入消元, 然后利用二次函数配方法求最值, 这是解决二元函数最值问题的常用方法. 他的解法有不妥的地方吗?

S_2: 我认为他做得不对. 由$x=2-2y$且$x\geqslant 0$, 知$0\leqslant y\leqslant 1$, 所以当$y=0$时, x^2+y^2的最大值为4, 当$y=\dfrac{4}{5}$时, x^2+y^2的最小值为$\dfrac{4}{5}$.

T: 很好, 第一位同学只看到题中条件$y\geqslant 0$, 而第二位同学能挖掘出题中的隐含条件$x=2-2y\geqslant 0$, 解题中我们要善于挖掘隐含条件.

S_3 (解法二): 老师, 我是用基本不等式来求解的. 由$2=x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$知$xy\leqslant\dfrac{1}{2}$, 所以$x^2+y^2\geqslant 2xy\geqslant 1$.

S_4: (马上回答) 老师, 他的答案不对.

T: 为什么会不对呢?

S_5: 由$xy\leqslant\dfrac{1}{2}$不能推出$2xy\geqslant 1$, 应该是$2xy\leqslant 1$, 不等式方向反了.

T: 很好, 还有其他错误吗?

S_6: 用了两次基本不等式, 但等号不能同时成立. $x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$当且仅当$x=2y=1$, 即$x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$时, 等号成立. $x^2+y^2\geqslant 2xy$当且仅当$x=y$, 即$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$时, 等号成立.

T: 不错, 利用基本不等式求最值, 一定要小心. 必须满足三个条件, 大家知道吗?

S_7: 各项为正数, 不等式等号须成立.

S_8: 还有, 求和的最小值, 积须为定值; 求积的最大值, 和须为定值.

T: 非常好, 还有其他解法吗?

S_9 (解法三): x^2+y^2可写成

$$(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2})^2,$$

表示点(x,y)到原点的距离的平方. 所求问题转化为线段$x+2y=2(x、y\geqslant 0)$上的点到原点的距离的平方的最大值和最小值. 最小值即为原点到线段$x+2y=2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$的距离的平方$d^2=\left(\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$, 最大值为原点到点(2,0)的距离的平方$d^2=4$.

T: 非常好, 由 x^2+y^2 可写成

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2,$$

联想到两点距离公式, 从而利用数形结合思想解题, 简单又直观. 现在我通过电脑给大家演示一遍 (课件展示原点与线段上的距离的变化过程). 那么, 从 x^2+y^2 还可联想到什么呢?

S_{10} (解法四): 我想到了圆的标准方程. 设 $x^2+y^2=R^2$ (不妨设 $R>0$), 几何意义表示以原点为圆心, R 为半径的动圆, 所求的问题转化为动圆与线段相交时的动圆的半径的最值. 当动圆与线段外切时, 半径最小, 当动圆与线段相交于点 (2,0) 时, 半径最大.

T: (翘起大拇指) 真棒! 我们借助电脑来演示一遍 (课件展示动圆与线段相交时半径逐渐增大这一变化过程, 边演示, 边讲解).

T: 利用数形结合求最值, 既直观又形象, 学习中, 要善于由形到数, 由数到形, 数形渗透, 双向联想. 数形结合不仅是一种重要的解题方法, 也是一种重要的思维方式.

S_{11} (解法五): (跃跃欲试) 老师, 我还有一种解法 (上台投影演示). $x+2y=2$, 即 $\frac{x}{2}+y=1$, 令 $\frac{x}{2}=\cos^2\theta$, $y=\sin^2\theta$, 即 $x=2\cos^2\theta$, $y=\sin^2\theta$. 由 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 所以令 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 代入 $x^2+y^2=4\cos^4\theta+\sin^4\theta=4(1-\sin^2\theta)^2+\sin^4\theta=5\left(\sin^2\theta-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$, 由 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 知 $\sin^2\theta\in[0,1]$, 从而求得最值.

T: 很好, 你是怎样想到这种方法的呢?

S_{12}: 我由 $\frac{x}{2}+y=1$ 联想到 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 所以想到了对已知式子作三角换元.

T: 很棒, 学数学贵在善于联想, 善于类比. 那么, 还可作其他的三角换元吗?

S_{13} (解法六): 令 $x^2+y^2=R^2$ (不妨设 $R>0$), 则 $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$. 作三角换元: 令 $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$ (上台投影演示), $\therefore R\cos\theta+2R\sin\theta=2$,

$$\therefore \sqrt{5}R\sin(\theta+\phi)=2,$$

$$\left(\text{其中}\cos\phi=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\phi=\frac{\sqrt{5}}{5}\right),$$

$\therefore \sin(\theta+\phi)=\frac{2}{\sqrt{5}R}$, 又 $\because -1\leqslant\sin(\theta+\phi)\leqslant 1$, $\therefore -1\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}R}\leqslant 1$, 从而求出 R 的范围.

T: 大家有不同意见吗?

S_{14}: 我认为 $\sin(\theta+\phi)$ 不在区间 $[-1,1]$ 内, 由 $R>0$ 及 $x=R\cos\theta\geqslant 0$, $y=R\sin\theta\geqslant 0$, 可知 $\cos\theta\geqslant 0$, $\sin\theta\geqslant 0$, 所以可令 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 从而 $\sin(\theta+\phi)\in\left[\frac{1}{\sqrt{5}},1\right]$, 即

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}R}\leqslant 1,\ \text{知}\ \frac{4}{5}\leqslant R^2\leqslant 4.$$

T: 非常好, 这位同学的回答弥补了上一位同学的不足. 从这里可看出利用三角换元时, 要注意——(停顿片刻).

S_{15}: 根据已知条件对角的取值范围作出限定.

T: 很好. 这两位同学都是利用三角换元来求最值. 第一位同学对已知条件进行三角换元, 第二位同学是对所求式子进行三角换元, 收到了异曲同工的效果. 是否还有其他的代换法呢?(此时学生陷入深思中, 教师及时点拨, $x+2y=2$, 那么 x 与 $2y$ 的平均值为 1,可作——)

S_{16} (解法七): 均值代换. 设 $x=1+t\geqslant 0$, $2y=1-t\geqslant 0$, $\therefore -1\leqslant t\leqslant 1$, $\therefore x^2+y^2=(1+t)^2+\left(\frac{1-t}{2}\right)^2=\frac{5}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\left(t+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$, 从而求解.

T: 好, 利用均值代换求最值, 要注意什么?

S_{17}: 由已知条件确定参数 t 的范围.

(总结: 代换法有三角换元、代数换元、均值代换, 都体现了转化换元的数学思想.)

T: 在求最值的常用方法中, 我们尝试了配方法、数形结合法、基本不等式法、换元法来解此题, 还有什么方法可试一试?

S_{18}: 判别式法.

T: 好, 我们试试.

(学生独立思考, 互相讨论, 教师适当介入, 给予提示指导.)

S_{19} (解法八) (上台投影演示) 设 $s=x^2+y^2$. $\because x+2y=2, \therefore s=x^2+\left(\frac{2-x}{2}\right)^2=\frac{5}{4}x^2-x+1$, 即 $\frac{5}{4}x^2-x+1-s=0$, 利用判别式 $\geqslant 0$, 可求得 s 的最值.

T: 判别式 $\geqslant 0$ 只能说明方程在什么范围内有解?

S_{20}: 实数范围内.

T: 但由 $y=\frac{2-x}{2}\geqslant 0$ 知 $0\leqslant x\leqslant 2$, 该怎么办?

S_{21}: 利用二次函数根的分布来解, 问题转化为 $\frac{5}{4}x^2-x+1-s=0$ 在 $x\in[0,2]$ 上有解. 令 $f(x)=\frac{5}{4}x^2-x+1-s$, 即函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 内与 x 轴有交点.

分类讨论: 第一种情况: 有一个交点, 即 $f(0)f(2)\leqslant 0$, 解得 $1\leqslant s\leqslant 4$.

第二种情况: 有两个交点 (包括两个交点重合), 即 $\begin{cases}\Delta=1^2-4\times\frac{5}{4}\times(1-s)\geqslant 0,\\ f(0)\geqslant 0,\\ f(2)\geqslant 0,\\ \text{对称轴}\in[0,2],\end{cases}$

解得 $\frac{4}{5}\leqslant s\leqslant 4$, 即 $\frac{4}{5}\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

T: 很好! 判别式法只能判定方程在 $\mathbf{R}$ 内有无实数解, 而不能判定在 $\mathbf{R}$ 的某一个特定的区间 (真子集) 内有无实数解, 因此第一位同学仅考虑判别式 $\geqslant 0$, 只能说明此方程在 $\mathbf{R}$ 内有解, 并不能保证其解必在 [0,2] 内, 还须利用函数与方程思想解决问题.

2.2 师生回顾, 反思、总结

T: 同一道题, 从不同的角度去分析, 得到不同的解题方法. 我们一起小结本课的内容.

S_{22}: (1) 求函数最值的一些常用方法: 二次函数配方法、换元法 (三角换元、代数换元、均值换元)、构造法 (数形结合)、判别式法等.

(2) 求函数最值中渗透的数学思想: 函数与方程思想、换元与转化思想、数形结合思想、运动变化思想、分类讨论思想.

T: 从一道简单的求值问题, 我们得到这么多解法, 它们之间的各种联系表明事物是可以相互转化的, 真是"横看成岭侧成峰, 远近高低各不同".

2.3 布置作业 (略)

3. 教学设计说明

在高一、高二时, 我们陆续学习了求函数最值的一些常用方法, 但由于学习间隔时间较长, 所以学到的常用方法只是零碎的、分散的和不系统的, 每接触到一种方法只会就事论事地运用这一种方法来解题. 到了高三, 有必要做好知识归类梳理工作以及知识链的串接, 这堂课通过一题多解, 自然地将数学各章节、各学科的相关知识, 数学思想方法聚集起来, 构成各部分知识方法纵横交叉、前后沟通的网络状态, 无形中密切了各学科知识的联系.

(上接第3-36页)

因为抽象函数的解析式没有明确给出, 而满足条件的函数可能不止一个, 所以要一一列出往往是不现实的, 因此在选择题中将选择支一一代入检验是非常有效的办法.

例8 (2004年高考浙江卷第12题) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 ········ ( ).

(A) $x^2+x-\frac{1}{5}$; (B) $x^2+x+\frac{1}{5}$;

(C) $x^2-\frac{1}{5}$; (D) $x^2+\frac{1}{5}$.

分析: 方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解 $\Longleftrightarrow \begin{cases}u=g(x)\\ x=f(u)\end{cases}$ 有实数解 $\Longleftrightarrow u=g[f(u)]$ 有实数解, 即 $g[f(x)]=x$ 有实数解. 至此, 将选择支代入验证, 即可知B是不可能的, 故选 (B).

以上为了说明方便而分成六种策略, 但在具体解题中有时需要同时运用几种不同的策略, 如例7的证明中同时运用了赋值法. 因此, 在运用这些策略时要做到密切配合, 相得益彰.

数学归纳法中传递性的探究

710400 陕西省周至县第一中学 高伟鹏

数学归纳法, 其理解上的难点, 往往在于第二步的传递性(或递推性), 因为对传递性理解不到位, 对传递性逻辑必要性认识不够, 学生极易对数学归纳法的科学性产生怀疑. 笔者认为, 要进行好数学归纳法的教学, 就应该十分重视传递性的突破. 在教学中, 可以从以下四个方面具体展开讨论.

一、假命题可以具有传递性

下面一些命题($n \in \mathbf{N}_+$), 都具有传递性. (但它们都是假命题).

(1) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+L$ (L为固定的非零实数值).

(2) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-L$ (L为固定的非零实数值).

(3) $2^n>n+L$ (L为固定的实数值, 且$L\geqslant 1$).

(4) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<-\frac{1}{n}+L$ (L为固定的实数值, 且$L\leqslant 1$).

(5) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+L$ (L为固定的非零实数值).

(6) $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n+L$ (L为固定的非零实数值).

二、不具有传递性的命题确实是存在的

下面6个命题($n \in \mathbf{N}_+$) 都不具有传递性. (因为当我们假设$n=k$时等式成立, 却一定能推出$n=k+1$时等式不成立).

(1) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+1$.

(2) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+1)$.

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-n$.

(4) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=n^3$.

(5) $1^3+2^3+\cdots+n^3=n^4$.

(6) $1\cdot 4+2\cdot 7+\cdots+n(3n+1)=4n^3$.

三、真命题也可能不具有传递性或证不出传递性

关于数学归纳法的传递性, 我们要在澄清一个问题的基础上统一一种认识.

若$1+1=2$,则地球是运动的.

按照逻辑学知识, 这个命题是真的! (因为"$1+1=2$"和"地球是运动的"都是正确的), 但是, 在数学归纳法中, "假设$n=k$时命题$P(n)$正确$\Longrightarrow n=k+1$时命题$P(n)$正确"中应该排除这种理解, 即数学归纳法的传递性, 在由"$n=k$时命题$P(n)$正确" $\Longrightarrow$ "$n=k+1$时命题$P(n)$正确"时并不考虑"$n=k$和$n=k+1$时命题$P(n)$是否真正成立(而前面对"若$1+1=2$, 则地球是运动的"的判定是由"$1+1=2$"的真正成立和"地球是运动的"真正成立推断出来的); 即使"如果$n=k$时命题$P(n)$正确, 则$n=k+1$时命题$P(n)$正确"是一个真命题, 也不一定能说命题$P(n)$具有传递性, (数学归纳法中证明命题的传递性, 并不仅仅是证明"若$n=k$时命题$P(n)$正确, 则$n=k+1$时命题$P(n)$正确"为真命题). 这就像在"第k块和第$k+1$块骨牌确已倒下了"的情况下, 虽然可以认为"若第k块骨牌倒下了, 则第$k+1$块骨牌倒下了"是真命题, 但也不能说第k块骨牌和第$k+1$骨牌之间具有传递性, 而传递性的实质应该是"由$n=k$时命题成立"的假设经过一定的变形过程推导出"$n=k+1$时命题成立".

在以上关于传递性的理解下, 自然就出现了这样的情况, 即一些真命题也可能不具有传递性或证不出传递性.

如$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1$ ($n\in\mathbf{N}_+$).

探索条件等式求值　注重师生课堂交流

223900　江苏省泗洪县教研室　陆振新　江苏省泗洪县第四中学　朱绍志

在一节数学复习课中, 教师要求学生做一道练习题:

若实数a、b满足条件$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, 求$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$的值.

一名学生板书解题过程如下:

解: $\because\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,

$\therefore b(a+b)+a(a+b)=ab$,

$ab+b^2+a^2+ab=ab$,

$a^2+b^2=-ab$,

$\therefore \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{-ab}{ab}=-1$.

全班同学基本上都是这个答案, 教师也认为是对的, 在黑板上画了一个对号通过. 这时, 有个同学举手提出问题: $a^2+b^2=-ab$与已知条件矛盾! 面对学生的质疑, 教师也意识到在备课中, 自己忽略了习题条件本身可能存在的问题, 思维过程出现了漏洞, 这个漏洞又在学生面前暴露出来了. 教师首先表扬了这位学生, 并请该同学说说理由, 这位学生板书如下:

由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, 得$a^2+b^2=-ab$, 即$(a+b)^2=ab$,

$\because\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,

$\therefore\ ab\neq 0,\ a+b\neq 0$,

$\therefore\ (a+b)^2=ab>0$.

$a^2+b^2>0$,

这与$a^2+b^2=-ab<0$矛盾.

此时, 同学们恍然大悟, 课堂气氛顿时活跃起来. 教师因势利导, 继续引导学生从多角度说明矛盾存在. 通过分组讨论, 同学们又得到如下三种方法:

方法1: 由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, 得$a^2+ab+b^2=0$,

即$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2=0$.

一方面, $\because\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$.

$\therefore\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}<1\,(n\in\mathbf{N}_+)$是成立的.

另一方面, 假设$n=k$时不等式成立.

即$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}<1$.

但无法由此推出$n=k+1$时不等式成立.

这就说明, 原不等式证不出传递性(或者根本就不具有传递性).

四、数学归纳法中关于传递性的推导既强调“过程性”又强调“归纳假设”的“必用性”

在由“$n=k$时命题$P(n)$正确”得出“$n=k+1$时命题$P(n)$正确”的时候必须要有一个逻辑推导过程, 而且“$n=k$时命题$P(n)$正确”的归纳假设“必须要用到” (例子略).

围绕以上四个方面所进行的教学, 实际上就是把“传递性”从数学归纳法中剥离出来后单独加以考察的做法. 这样从反面、侧面用实例来考察传递性, 有利于学生认识的深化, 有利于学生头脑中关于“传递性”的意义建构. 特别是关于“传递性否定”的实例讨论, 十分有利于学生关于“传递性”本质的理解. 通过这几种做法, 在较好地突破了传递性这个难点的基础上, 可以大大促进数学归纳法的教学.

$\because$ a、b为实数,

$\therefore$ $\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}=0, \\ b=0. \end{cases}$

即$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$与已知条件矛盾.

方法2: 由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,

得$a^2+ab+b^2=0$. (1)

把(1)式看作关于a的一元二次方程, 由$\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0$可知方程(1)无实数根. 与a、b是实数矛盾.

方法3: 由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, 得$a^2+ab+b^2=0$,

令$y=a^2+ab+b^2$. (2)

把(2)式看作自变量为a的二次函数, 由$\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0$可知二次函数(2)的图象开口向上, 且与x轴没有交点.

$\therefore$ $y=a^2+ab+b^2>0$.

这与$a^2+ab+b^2=0$矛盾.

综上所述, 该题的已知条件"若实数a、b满足条件$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$" 的确是错误的.

学生自己发现了练习题中的错误, 心情特别激动, 积极性空前高涨. 这时, 教师又让学生做了一道练习题:

已知a、b、c为实数, 且满足条件$a+b+c=0$, $abc=8$. 试判断$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$的符号.

学生甲的板书如下:

解: $\because$ $a+b+c=0$,

$\therefore$ $a+b=-c$.

又$\because$ $abc=8$,

$\therefore$ $ab=\dfrac{8}{c}$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{b+a}{ab}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{-c}{\frac{8}{c}}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{-c^2}{8}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{-c^3+8}{8c}$.

(1) 当$-c^3+8=0$, 即$c=2$时,

$\dfrac{-c^3+8}{8c}=\dfrac{0}{16}=0$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

(2) 当$\begin{cases} -c^3+8>0, \\ 8c>0. \end{cases}$或$\begin{cases} -c^3+8<0, \\ 8c<0. \end{cases}$

即$0<c<2$时, $\dfrac{-c^3+8}{8c}>0$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$.

(3) 当$\begin{cases} -c^3+8>0, \\ 8c<0. \end{cases}$或$\begin{cases} -c^3+8<0, \\ 8c>0. \end{cases}$

即$c<0$或$c>2$时, $\dfrac{-c^3+8}{8c}<0$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<0$.

学生乙的板书如下:

$\because$ $a+b+c=0$, $abc=8$,

$\therefore$ $(a+b+c)^2=0$.

即$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$,

$\therefore$ $2(ab+bc+ca)=-(a^2+b^2+c^2)$,

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{2(bc+ac+ab)}{2abc}=\frac{-(a^2+b^2+c^2)}{2\times 8}<0.$$

学生甲、乙的解答代表着同学们两种不同的解法, 究竟谁的解法对呢? 学生乙的解法显然更简洁, 避开了分类讨论, 结论正确. 学生甲没有挖掘题目中c取值的隐含条件, 思维过程出现了漏洞. 如何找出c的取值范围呢? 教师启发学生: (1) 要求c的取值范围, 要先消去什么? (2) 你能构造出以a、b为实数根的一元二次方程吗? 学生通过讨论, 认为要求c的取值范围, 要先消去a、b, 构造以a、b为实数根的一个一元二次方程, 然后根据方程有实根的条件, 求出的取值范围. 学生解答如下:

$\because$ $a+b+c=0$, $abc=8$,

$\therefore$ $a+b=-c$, $ab=\dfrac{8}{c}$. (3)

设$(x-a)(x-b)=0$, 即$x^2-(a+b)x+ab=0$, 把(3)代入, 得

$x^2+cx+\dfrac{8}{c}=0$. (4)

$\because$ 方程(4)有实数根a、b,

$\therefore$ $\Delta=c^2-4\times 1\times\dfrac{8}{c}\geqslant 0$,

从探究$y=\dfrac{1}{f(x)}$型函数的值域谈起

310007　浙江大学附属中学　王　迪

1. 问题提出的背景

很多与《全日制普通高级中学教科书(必修·第一册(上)》配套的资料上, 都有这样一类题目:求函数$y=\dfrac{1}{x^2-6x+1}$的值域.

大多数学生是这样回答的:因为$x^2-6x+1=(x-3)^2-8\geqslant-8$,

所以$\dfrac{1}{x^2-6x+1}\leqslant-\dfrac{1}{8}$, 即原函数的值域是$\left\{y\,\middle|\,y\leqslant-\dfrac{1}{8}\right\}$.

类似的错误经过反复讲评、订正, 但收效甚微. 于是决定以"探讨$y=\dfrac{1}{f(x)}$型函数的值域"为课题上一堂专题课.

2. 课堂实录

2.1 回顾内容, 明确任务

教师:前面我们主要学习了函数的有关概念, 以及函数的表示方法. 我们知道用图象法来描述函数y与自变量x之间的关系, 具有直观、形象的特点. 鉴于同学们在练习中暴露出来的问题, 这一节课我们将利用描点作图法, 来研究$y=\dfrac{1}{f(x)}$型函数的值域.

1. 实验要求

(1) 教室内位于奇数行的学生向后转, 每两行中前、后四小组各八名学生组成一个小组;

(2) 各组选出一位组长, 结束后, 代表小组作汇报发言;

(3) 每位同学自己确定合适的实数(a,b,c)(下表第一列的数, 应填多种情况, 若不够, 请自己添加).

(a,b,c)	$f(x)=ax^2+bx+c$ 与$y=\dfrac{1}{f(x)}$的图象	$y=\dfrac{1}{f(x)}$的值域

2. 在同一坐标系内, 画出函数$f(x)=ax^2+bx+c$与$y=\dfrac{1}{f(x)}$的图象(为示区别, 建议使用不同的线条).

3. 利用图象, 写出函数$y=\dfrac{1}{f(x)}$的值域.

4. 写出实验心得.

2.2 取长补短, 完成《实验》

表中第一列数的选取是开放的, 绝大多数组的同学想到:必须事先对如何取数进行分类

即$\dfrac{c^3-32}{c}\geqslant0$.

原不等式等价于$\begin{cases}c^3-32\geqslant0,\\ c>0.\end{cases}$

或$\begin{cases}c^3-32\leqslant0,\\ c<0.\end{cases}$

解之, 得$c<0$或$c\geqslant\sqrt[3]{32}$.

∴ 学生甲的结论应改为:

当$c<0$或$c\geqslant\sqrt[3]{32}$时,

$\dfrac{-c^3+8}{8c}<0$.

∴ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<0$.

这节复习课因为习题条件的错误自然地创设了问题情境, 激发了学生主动地提出问题. 在教师的引导下, 学生自主探索, 找出错误的原因, 充分体现出学生提出问题、分析问题和解决问题的实践能力, 通过暴露学生的思维过程, 教师思维过程中出现的漏洞也同时暴露出来, 并得到了及时弥补, 师生思维的批判性品质都得到了进一步强化, 这也是在渗透新课程理念的课堂教学中, 教师角色转变的一种本质属性的体现.

讨论. 还有的小组把画图任务进行分工, 下面是其中一组同学填写的表格:

(a,b,c)	$f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $y=\frac{1}{f(x)}$ 的图象	$y=\frac{1}{f(x)}$ 的值域	$f(x)$的取值范围
$\left(\frac{1}{4},-1,3\right)$		$0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$	$f(x)\geqslant 2$
$\left(\frac{1}{4},-1,1\right)$		$y>0$	$f(x)\geqslant 0$
$\left(\frac{1}{4},-1,\frac{1}{2}\right)$		$y>0$ 或 $y\leqslant -2$	$f(x)\geqslant -\frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{4},1,-3\right)$		$-\frac{1}{2}\leqslant y<0$	$f(x)\leqslant -2$
$\left(-\frac{1}{4},1,-1\right)$		$y<0$	$f(x)\leqslant 0$
$\left(-\frac{1}{4},1,-\frac{1}{2}\right)$		$y<0$ 或 $y\geqslant 2$	$f(x)\leqslant\frac{1}{2}$

教师: 大家注意到了吗? 这一组同学画的图象有一定的规律. 而且表格多了一列.

学生: 对称轴不变, 把抛物线上下移动分别与x轴相交、相切、相离, 开口向上或向下都考虑到了. 先确定$f(x)$的取值范围有利于写$y=\frac{1}{f(x)}$的值域(有的组所画的图象比较杂乱, 还有的没有画全, 同学们纷纷露出佩服的表情).

这时候有位同学举起手来.

学生A: 我有一个疑问, $a=0$可以吗? 设$f(x)=2x-6$, 则$f(x)$的取值范围是全体实数, $y=\frac{1}{f(x)}$的值域为$y\neq 0$(如图1).

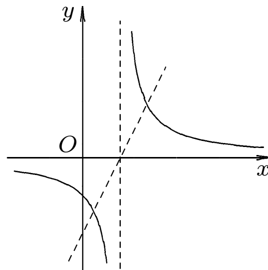


图 1

同理, 若$x>5$, 则$f(x)$的取值范围是$f(x)>4$, $y=\frac{1}{f(x)}$的值域为$y<\frac{1}{4}$.

若$x>1$, 则$f(x)$的取值范围是$f(x)>-4$, $y=\frac{1}{f(x)}$的值域为$y<-\frac{1}{4}$或$y>0$.

若$1<x<2$, 则$f(x)$的取值范围是$-4<f(x)<-2$, $y=\frac{1}{f(x)}$的值域为$-\frac{1}{2}<y<-\frac{1}{4}$.

······

教师: 让我们一起来思考这位同学的补充, 看他提出的问题对今天这堂课能起什么作用.

学生从一开始的惊愕变成纷纷点头: 这样画图更简单, $f(x)$的取值范围更全面. $y=\frac{1}{f(x)}$的值域与$f(x)$的最值以及$f(x)$是否为0关系较大, 而与$f(x)=ax^2+bx+c$图象的形状关系不大. ······

2.3 交流互评, 归纳梳理

交流过程中, 学生以本组活动存在的不足为主. 如分类标准不够合理——过分突出a、b、c的正、负号; 用描点法作$y=\frac{1}{f(x)}$的图象没有熟练掌握, 甚至画错; 对定义域的理解不够等等. 而其他组的同学在进行讨论时, 都尽可能地发现、肯定其优点. 因此, 交流的气氛非常融洽, 经过同学们的补充、概括, 得到以下关于"$y=\frac{1}{f(x)}$型函数的值域"的结论.

$f(x)$ 的取值范围 设 $m<0<n$, 且 $m+n>0$	函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的值域
$f(x)\geqslant n\ (f(x)>0)$ $(f(x)\geqslant m)$	$0<y<\dfrac{1}{n}\,(y>0)$ $\left(y\leqslant\dfrac{1}{m}\text{或}\,y>0\right)$
$f(x)\leqslant m\ (f(x)<0)$ $(f(x)\leqslant n)$	$\dfrac{1}{m}\leqslant y<0\,(y<0)$ $\left(y\geqslant\dfrac{1}{n}\text{或}\,y<0\right)$
$-m\leqslant f(x)\leqslant n$ $(-n\leqslant f(x)\leqslant m)$	$\dfrac{1}{n}\leqslant y\leqslant-\dfrac{1}{m}$ $\left(\dfrac{1}{m}\leqslant y\leqslant-\dfrac{1}{n}\right)$
$m\leqslant f(x)\leqslant n$	$y\geqslant\dfrac{1}{n}$ 或 $y\leqslant\dfrac{1}{m}$
$0<f(x)\leqslant n\ (m\leqslant f(x)<0)\,(f(x)\neq0)$	$y\geqslant\dfrac{1}{n}\ \left(y\leqslant\dfrac{1}{m}\right)$ $(y\neq0)$

2.4 媒体辅助, 验证结论

在教师的辅导下, 学生运用几何画板软件画出下列 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 型函数的图象, 观察其值域并检验此前所得的结论是否正确 (时间允许的话, 应各取不一样的定义域, 多观察、对比其相应值域的变化规律).

2.5 练习巩固, 布置作业

另附练习卷(包括课内、课外两部分).

3. 在新课标理念的指导下设计教学

3.1 改进学习方式, 促进学生发展

本节课的教学试图努力改进学生的学习方式, 以小组合作的方式展开, 共同配合完成选数、计算、作图、填表等活动, 在合作中自主探索, 发现数学结论. 教学实践表明, 由于改变了全班学生做同一道题的做法, 学生的学习是主动的. 他们可以自由选取第一列 (a,b,c) 的数据, 引起函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的值域的变化, 从而不断激发学生的求知欲望. 以学生A为代表的部分学生看上去只是对前面的结果进行补充, 实质上他们不仅弥补了思维定势: $f(x)=ax^2+bx+c$ 型函数的图象一定是抛物线所造成的值域缺失, 而且揭示了问题的实质: $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 型函数的值域只与 $f(x)$ 的取值范围有关. 开放的教学给学生以主动提升学习任务的机会.

3.2 突出"数学化"过程, 完善学生的认知结构

$y=\dfrac{1}{f(x)}$ 型函数的值域同 $f(x)$ 的形式有什么关系? 如何得出对值域进行分类的依据? ⋯⋯ 这些, 数学书或者课外辅导书上都没有. 教师应该认识到, 高度的抽象性和形式化, 造成了数学的难懂、难教、难学, 而数学是一门既注重演绎推导, 又非常需要实验归纳的学科, 这就更需要学习者的亲身感受, 让学生从自己的经验和认知基础出发, 通过数据处理、运算观察、类比归纳、反思抽象以及符号表示等活动, 用数学的思想和方法去发现、去猜想、去提取结论, 通过这样的实践与思考、肯定与驳斥, 促进学生把客观的数学知识内化为认知结构中的成分. 在本节课中, 关于 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 型函数的值域, 学生的认知有如下的变化:

(1) 由抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在坐标系中的位置决定;

(2) 设 $f(x)=bx+c$, 图形简化, 并且分母的取值范围更明确;

(3) 只由分母的取值范围决定, 而与 $f(x)$ 的形式无关.

3.3 正确认识教师在教学活动中的角色

这节课一开始, 教师通过回顾内容, 明确本节课"借图形, 求值域"的任务, 这时候教师是设计者、引导者; 在学生运算、画图, 教师巡视的过程中, 教师是指导者, 咨询人; 在学生交流、互评阶段, 教师必须是一位组织者、评判者; 而当学生提出异议时, 教师必须和同学一起面对新问题, 成为学生学习的合作者, 充当对话者的角色. 要改变"教师讲, 学生听"这一陈旧的教学模式, 教师必须真正重视学生的主体地位, 实现从较为单一的知识传授者向课堂教学的设计者、引导者、合作者等多种角色的转变.

3.4 重视基本技能的训练

本节课在设计之初, 曾准备选取数据 (a,b,c) 后, 先利用几何画板把各 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的图形画出来, 把教学重点放在对结论的观察、归纳、概括上, 这样的话, 看上去效率很高, 但考虑

对平方数累加公式的探讨

317000 浙江省临海市回浦中学 狄海鸣

记得自己当学生时, 是在教科书的封面上第一次看到平方数的累加公式: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$的, 除了这个公式, 封面上还画着金字塔状的"四角垛", 心里很是惊奇——这个公式的发现者是多么的神奇, 居然能"拼凑"出这种关系. 当时自己虽然能够用数学归纳法证明这公式, 但"只知其然, 不知其所以然". 后来, 当上了数学老师, 也看到了前人给出的推导过程(用$(1+k)^3=k^3+3k^2+3k+1$来推导). 过程如下:

将k自1至n代入, 不难导出以下公式:

$(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$,

$(1+2)^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$,

$(1+3)^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$,

$\cdots$

$(1+(n-1))^3=(n-1)^3+3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$,

$(1+n)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1$.

将等号两边依序相加, 然后约去相等的部分, 可以得到 $(1+n)^3=1^3+3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n$,

整理之后即可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

但是这种累加的方法难以想到, 并非"理所当然". 我也只能感叹技不如人, 可心中总有点闷.

后来, 在高中数学(选修Ⅱ)的研究性课题: 杨辉三角中发现教科书中有一个习题(见人教社2001年12月第2版, 第74页, 习题2.2第1题)摘抄如下: 如图(图略), 将圆珠堆成三角垛, 底层每边为n个. 容易看出, 当$n=1, 2, 3, 4, \cdots$时, 三角垛中的圆珠总数分别为1, 4, 10, 20, $\cdots$. 根据前面的结论, 这样的一个n层的三角垛中的圆珠总数是

$$1+3+6+\cdots+C_{n+1}^2$$
$$=C_{n+2}^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

"$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$"和"$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"是何等的相似.

"三角垛"和"四角垛"又是这样的"密切". 于是我就从"三角垛"和"四角垛"的关系着手来解读"$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$"和"$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"的关联. 因为"三角垛"的总数公式是用演绎的方法得到的, 如果能够将"三角垛"和"四角垛"的关系梳理清晰, 那么, 平方数的累加公式

到描点法作函数的图象是高一数学的重点, 而且对学生来说, x取"零点"附近的数时, y的值趋向于无穷大是一个难点. 《新课标》指出"熟练掌握一些基本技能, 对学好数学是非常重要的." "在高中数学课程中, 要重视运算、作图、推理、处理数据以及科学计算器的使用等基本技能训练." 因此, 本节课将计算机的应用安排在落实"描点作图法"之后, 作为对所得结论的验证. 符合《新课标》关于信息技术与数学课程的整合——"在保证笔算训练的前提下", "整合的原则是有利于学生认识数学的本质".

参考文献

1. 普通高中数学课程标准(实验). 北京. 人民教育出版社. 2003. 4.

2. 钱佩铃. 如何认识数学教学的本质. 数学通报. 2003. 10.

3. 陶维林. 用新课标理念设计一堂课的教学. 数学通报. 2004. 8.

函数单调性与数列单调性的整合

433300 湖北省监利县一中 胡耀宇

教材高一(上)(指全日制普通高中教材必修本; 下同)学习了函数单调性定义和数列, 并指出了数列与函数的关系; 高二(下)研究二项式系数的性质, 在研究其增减性时, 用 $C_n^k = C_n^{k-1}\cdot\dfrac{n-k+1}{k}$ 来讨论, 这里实际上提出了函数单调性定义在数列中的具体应用: 数列 $\{f(n)\}$ 单调增等价于 $f(n+1) > f(n)$; 单调减等价于 $f(n+1) < f(n)$; 选修教材又给出了导数与函数单调性的联系. 由此有必要"整合"两种单调性的关系.

1. 和谐的统一

例1 (2004年上海春季高考题) 已知函数 $f(x) = |x-a|$, $g(x) = x^2+2ax+1$ (a 为正常数), 且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象在 y 轴上截距相等. (1) 求 a; (2) 求 $f(x)+g(x)$ 单调递增区间; (3) 若 n 为正整数, 证明: $10^{f(n)}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{g(n)} < 4$.

解: (1) $a = 1$. (2) 略. 第3小题有两种解题方法.

方法一: 设 $c_n = 10^{f(n)}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{g(n)} = 10^{n-1}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n^2+2n+1}$, 考查数列 $\{c_n\}$ 的变化规律.

解不等式 $c_{n+1} < c_n$, 由 $c_n > 0$ 化为 $10\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n+3} < 1$. 解得 $n > \dfrac{-1}{2\lg 0.8} - \dfrac{3}{2} \approx 3.7$. 因 $n \in \mathbf{N}$ 得 $n \geqslant 4$, 于是 $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4$, 而 $c_4 > c_5 > \cdots$, 所以

$$10^{f(n)}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{g(n)} \leqslant 10^{f(4)}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{g(4)} = 10^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{25} \approx 3.777893186273 < 4.$$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 就可以用一个比较容易理解的方法"理所当然"地得到.

这首先要感谢遥远的毕达哥拉斯和他的门徒们. 他们发现了三角数的一个性质: 任意两个连续三角数的和是一个平方数, 如图1所示.

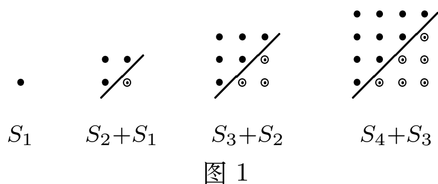
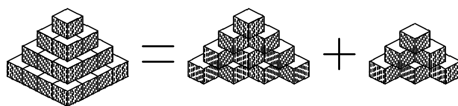


图 1

显然, 一个4层的"四角垛"可以分解为一个4层的"三角垛"加上一个3层的"三角垛", 如图2.



4层的"四角垛" 4层的"三角垛" 3层的"三角垛"

图 2

进而, 一个 n 层的"四角垛"可以分解为一个 n 层的"三角垛"加上一个 $n-1$ 层的"三角垛". 所以,

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\
&= (1+3+6+\cdots+C_{n-1}^2)\\
&\quad +(1+3+6+\cdots+C_n^2)\\
&= C_{n+2}^3 + C_{n+1}^3\\
&= \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{3!}(n-1)n(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)(n+2+n-1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

这个以前曾困惑我的公式终于用"理所当然"的方法解决了.

方法二: 设 $\varphi(x) = 10^{x-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x+1}$, $x \geqslant 1$. $\varphi'(x) = 10^{x-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x+1} \cdot [\ln 10 + \ln\frac{4}{5}\cdot(2x+2)]$,

解 $\varphi'(x) > 0$, 得 $x < \dfrac{\ln 10}{2\ln\frac{5}{4}} - 1 \approx 4.16$.

即函数 $\varphi(x)$ 在 $(1,4.16)$ 递增; $\varphi(x)$ 在 $(4.16, +\infty)$ 递减, 所以

$\varphi_{\max}(n) = \varphi(4) = 3.777893186273 < 4$.

从2000年起上海市允许计算器进入高考试场, 因而产生新的解题手段和方法, 当然也就改变某些传统解题思路. 如本题涉及与自然数有关的不等式证明, 还可用数学归纳法. 但两种方法均运用计算器, 利用数列与函数单调性加以解决, 显得清晰简单, 和谐又统一.

2. 统一中的不和谐

例2 (2003年新课程卷) 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}\,(n \in \mathbf{N}_+)$.

(I) 证明: $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1}\cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n \cdot a_0$;

(Ⅱ) 假设对任意 $n \geqslant 1$, 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.

问题 (I), 略; 对问题 (Ⅱ), 提出下列两种解法:

方法一: $a_n > a_{n-1}$ 等价于 $(-1)^{n-1}(5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$.

当 $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \cdots$ 时, 即为

$(-1)^{2k-2}(5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3}$, 即 $a_0 < \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3} + \frac{1}{5}$, 对 $k = 1, 2, \cdots$ 都成立, 有 $a_0 < \frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$.

当 $n = 2k$, $k = 1, 2, \cdots$ 时, 即为

$(-1)^{2k-1}(5a_0 - 1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2}$, 即 $a_0 > -\frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2} + \frac{1}{5}$, 对 $k = 1, 2, \cdots$ 都成立, 有 $a_0 > -\frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2\times 1-2} + \frac{1}{5} = 0$,

综上所述, 对 $n \in \mathbf{N}_+$ 成立的 a_0, 其取值范围为 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

方法二: 由 a_n 的表达式, 记 $f(n) = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1}\cdot 2^n] + (-1)^n 2^n \cdot a_0$, 因而问题等价于 $f'(n) > 0$ 对 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立.

当 n 为奇数, $f'(n) = \frac{1}{5}(3^n \ln 3 + 2^n \ln 2) - 2^n a_0 \ln 2$, 由 $f'(n) > 0$,

得 $a_0 < \frac{1}{5}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\ln 3}{\ln 2} + 1\right]$ 恒成立, 从而

$a_0 < \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\times\frac{\ln 3}{\ln 2} + 1\right)$

≈ 0.675488750216.

当 n 为偶数,

$f'(n) = \frac{1}{5}(3^n \ln 3 - 2^n \ln 2) + 2^n \cdot a_0 \ln 2$,

由 $f'(n) > 0$ 得 $a_0 > \frac{1}{5}\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$,

从而 $a_0 > \frac{1}{5}\left(1 - \frac{3}{2}\times\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \approx -0.2755$.

综上所述, a_0 取值范围是

$(-0.2755, 0.6755)$.

同样利用函数单调性与数列单调性解题, 例1是两者殊途同归, 而例2两者却相距甚远.

实际上, 运用计算器解决例1时, 就出现了不和谐的"音符", 方法一中 n 接近于3.7取值, 方法二中 n 接近于4.16取值时, 函数对应于取得最大值, 只是由于取 $n \in \mathbf{N}_+$, 将两者统一于 n 取4. 但并未掩饰其当取具体值时两者的差异, 由此也不难理解为什么对于例2, 两种方法所得两种结果不吻合的原因了. 因此, 数列可以看作是定义域为 $\mathbf{N}_+$ (或它的有限子集) 的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值. 但将数列问题简单地函数化, 难免会有一定的差异.

3. 函数也有鞭长莫及之时

例3 (教材选修(Ⅱ) P.9 习题1.1第7题) 如果 $\xi \sim B\left(20, \frac{1}{3}\right)$, 求使 $P(\xi = k)$ 取最大值的

(下转第3–47页)

善待学习圆锥曲线时发生的认知错误

510075 广东省广州白云中学 薄立平 710003 陕西省西安市西安中学 薛党鹏

错误是学生在学习过程中自然存在的一种现象. 在教学中企图让学生完全避免错误是不可能的, 也是没有必要的. 事实上, 错误一方面可以充分暴露学生思维的薄弱环节, 有利于对症下药; 另一方面, 错误也是正确的先导, 错误在许多时候比正确更有教育价值. 这正如当代科学家、哲学家波谱尔所说, "错误中往往孕育着比正确更为丰富的发现和创造因素, 发现的方法就是试错的方法". 如何正确地认识和对待学生的错误? 本文结合一个具体的案例, 给出若干对待学生认知错误的基本态度.

案例 在学习圆锥曲线时, 遇到了这样一道题目: 方程

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1 \quad ①$$

所表示的曲线是什么?

对于这道题目的解答, 学生中出现了下述两种错误的解答.

解法1: 在几何上, 此方程表示点 (x,y) 到两个定点 $(-1,0)$、$(1,0)$ 的距离之和为定长1, 所以, 此方程所表示的曲线应该为椭圆.

解法2: 将 ① 变为 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. ②

两边平方得 $1-4x=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

再平方得 $12x^2-4y^2=3$. ③

即 $$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1. \quad ④$$

这是双曲线的方程. 所以, 原方程表示的曲线应该为双曲线.

毫无疑问, 上述两种解法都是错误的. 但是, 面对错误, 作为执教者应该如何处理呢?

首先, 教师应该充分认识到学生错误产生的内在合理性, 并且尽最大可能地对于错误中的合理成分予以肯定. 在上述案例中, 持有解法1的学生看到了方程所对应的几何结构, 并且由此联想到了椭圆的定义. 这种数形结合的思想以及应用定义的意识都应该予以充分的肯定; 持有解法2的学生尽管没有看到原方程所对应的几何结构, 但是其方程化简的意识, 以及化简过程中所体现的毅力、恒心和运算的熟练性、准确性都应予以充分的表扬. 只有这种正确对待学生错误的态度才超越了简单的知识教学, 其意义将使学生终身受益.

其次, 学生的认知错误应该借助于学生的"自我否定"来得以纠正.

在上述案例中, 针对解法1, 教师如果直接指出其病根(椭圆的定义要求到两定点的距离之和大于两定点的距离), 那么就是以教代学, 剥夺了一次学生自我思考、训练思维的极好机会, 而且如此简单的处理, 也势必会增加同样错误的出现频率. 相反地, 如果执教者启发学生求出此椭圆的标准方程, 那么学生在由 $2a=1$, $2c=2$ 去求 b 时, 会自觉地发现 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$, 实数 b 不存在, 怎么回事? 这必然会诱发学生的进一步思考和对于解法1的质疑. 当然, 针对解法1, 执教者也可以启发学生试求出此椭圆和 x 轴的交点. 于是学生自然会在方程 ① 中令 $x=0$, 结果会发现 y 无实数解. 于是学生也会对于解法1开始质疑. 毫无疑问, 这种启发式的错误揭露不仅会使学生意识到自己认识的错误性, 同时也会激发学生对于错误解法的自我反省和自我更正.

同样地, 针对解法2, 执教者可以启发学生寻找双曲线与 x 轴的交点. 当学生由方程 ④ 求得交点 $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ 以后, 教师可以让学生

抽象函数的解题策略

315200 浙江省镇海中学 沈红正

抽象函数是指这样一类函数: 它没有给出明确的解析式, 但给出了函数满足的一部分性质或运算法则. 它要求学生由此来研究函数的其他性质或根据法则进行运算. 由于这类函数问题可以全面地考查学生对函数概念和性质的理解, 同时抽象函数问题又将函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性和图象集于一身, 因此在近几年的高考试题中不断地出现. 然而, 由于这类问题本身的抽象性和其性质的隐蔽性, 学生在解决这类问题时, 往往感到无从下手, 正确率很低. 本文就这类问题的解题策略谈点粗浅的看法.

一、运用所给的性质解题

有关抽象函数问题虽然没有给出函数的解析式, 但它给出了函数满足的性质, 如单调性、奇偶性、周期性、对称性等, 我们可以直接运用这些性质来解决有关问题. 这是解决有关抽象函数问题的基本策略.

例1 设函数 $f(x)$ 的定义域是 (0,2), 求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

分析: 由题意得 $0 < x^2 < 2$, 所以 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 且 $x \neq 0$, 即函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $(-\sqrt{2},0) \cup (0,\sqrt{2})$.

例2 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$, 且满足下列条件: (1) $f(x)$ 是奇函数; (2) $f(x)$ 在

将其代入方程 ① 进行检验. 结果学生会发现 $\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$ 并不适合方程 ①. 于是学生自然会“自我反省”, 重新认识解法2中的方程化简过程.

再之, 教师应该借助于错误来促使学生达到认识的升华. 针对上述案例的解法1, 当学生明确地认识到错误的根源之后, 教师就可以让学生对于“平面内到两定点的距离之和等于正常数的动点轨迹” 这一问题进行全面的认识和理解; 同时, 也可以对于双曲线、抛物线的定义进行重新的认识.

对于解法2, 当学生检查其解题过程的每一步骤, 即会发现演算是完全准确的, 而问题出在对于方程变形过程之中的平方运算. 事实上, 对于 ① 式两边平方相当于对 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}-[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}]=0$ 的两边同时乘以一个代数式

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}]$.

因而产生了增根方程

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}]=0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=-1. \quad ⑤$$

这正是双曲线 ⑥ 的一支.

当第二次平方时, 相当于对于 $1-4x-2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0$ 的两边同时乘以一个代数式 $(1-4x)+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, 因而又产生了增根方程 $1-4x+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0$, 由此得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$. ⑥

而这正是双曲线 ⑥ 的另外一支.

认识至此, 学生即会对于方程变形的等价性予以足够的重视, 同时, 这也必将诱发他们对于椭圆、双曲线、抛物线方程的推导过程进行重新的审视.

错误是一种很有开发价值的教学资源. 在实际教学中, 如果我们都能从有利于学生发展的角度考虑, 善待错误, 那么就一定会使得学生的错误转化为学习的催化剂, 让学生在出现错误、发现错误、纠正错误的过程之中既感受到数学的魅力, 又享受到学习数学的快乐.

定义域内是减函数; (3) $f(1-a)+f(1-a^2)<0$. 求实数的取值范围.

分析: $\because$ $f(x)$是奇函数, $\therefore$ $f(a^2-1)=-f(1-a^2)$, 于是由$f(1-a)+f(1-a^2)<0$得$f(1-a)<f(a^2-1)$. 又$f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数, 故有$\begin{cases}-1<1-a<1,\\ -1<a^2-1<1,\\ 1-a>a^2-1,\end{cases}$ 解得$0<a<1$.

例3 (2002年高考上海卷第12题)已知函数$y=f(x)$(定义域为D, 值域为A)有反函数$y=f^{-1}(x)$, 则方程$f(x)=0$有解$x=a$, 且$f(x)>x\,(x\in D)$的充要条件是$y=f^{-1}(x)$满足__________.

分析: 方程$f(x)=0$有解$x=a$, 且$f(x)>x\,(x\in D)$意即函数$y=f(x)$的图象在直线$y=x$的上方且过点$(a,0)$, 根据函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象之间的对称关系即可知函数$y=f^{-1}(x)$应满足的充要条件: 图象在直线$y=x$的下方且过点$(0,a)$, 即$f^{-1}(0)=a$, 且$x>f^{-1}(x)\,(x\in A)$.

二、运用赋值法解题

有关抽象函数问题中所给的函数性质或法则往往是对定义域内的一切数都成立的, 因此, 我们可以根据所要证明或求解的问题的结构使自变量取某些特殊值或式, 使问题得到便捷的解决. 这是解决有关抽象函数问题的重要策略之一.

例4 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$, 对任意实数u、v, 满足$f(u+v)=f(u)+f(v)$, 且$f(uv)=uf(v)+vf(u)$.

求(1) $f(0)$、$f(1)$; (2)试用$f(u)$、$f(v)$表示$f(u-v)$; (3)用u、v、$f(u)$、$f(v)$的表达式来表示$f\left(\dfrac{u}{v}\right)$.

分析: (1)设$u=1$, $v=0$, 则$f(1+0)=f(1)+f(0)$, 得$f(0)=0$. 令$u=1$, $v=1$, 得$f(1\times1)=f(1)+f(1)$, 得$f(1)=0$, 所以$f(0)=f(1)=0$.

(2)令$z=u-v$, 则$u=z+v$, 由条件得$f(u)=f(z+v)=f(z)+f(v)=f(u-v)+f(v)$, 所以$f(u-v)=f(u)-f(v)$.

(3)设$\dfrac{u}{v}=z$, 则$u=vz$, 由条件得$f(u)=f(vz)=vf(z)+zf(v)=vf\left(\dfrac{u}{v}\right)+\dfrac{u}{v}f(v)$, 所以$f\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{f(u)-\dfrac{u}{v}f(v)}{v}=\dfrac{vf(u)-uf(v)}{v^2}$.

三、运用示意图解题

函数图象是函数解析式的具体表现, 如果能把表示抽象函数的性质的示意图画出来, 那么就可以化无形为有形, 化抽象为具体, 解题就会变得直观、明了.

例5 (2004年高考湖南卷第12题)设$f(x)$、$g(x)$分别是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数和偶函数, 当$x<0$时, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$, 且$g(-3)=0$, 则不等式$f(x)g(x)<0$的解集是……………………………………………( )

(A) $(-3,1)\cup(3,+\infty)$;

(B) $(-3,1)\cup(0,3)$;

(C) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$;

(D) $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

分析: 令$F(x)=f(x)g(x)$, 则当$x<0$时, $F'(x)>0$, 故当$x<0$时, $F(x)$为增函数.

根据题意又可知$F(x)$是奇函数且$F(-3)=0$, 从而得到示意图(图1).

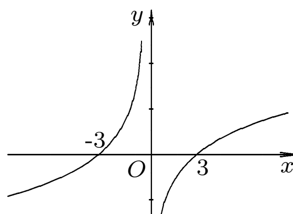


图 1

根据示意图即得不等式$f(x)g(x)<0$的解集是(D).

四、抓住特征, 合理变形

有关抽象函数问题中往往会给出函数$f(x)$所满足的等式或不等式, 因此在解有关问题时, 首先应对所要证明或求解的式子作结构上的变化, 使所要证明或求解的问题的结构与已知的相同.

例6 (2004年高考江苏卷第22题)已知函数$f(x)\,(x\in\mathbf{R})$满足下列条件: 对任意的实数

x_1、x_2都有$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$和$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|$, 其中$\lambda$是大于0的常数. 设实数$a_0$、$b$、$a$满足$f(a_0)=0$和$b=a-\lambda f(a)$. 证明:

(1) $\lambda \leqslant 1$, 并且不存在$b_0 \neq a_0$, 使得$f(b_0)=0$;

(2) $(b-a_0)^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;

(3) $[f(b)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

分析: (1)不妨设$x_1>x_2$.

由$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$可知$f(x_1)-f(x_2)>0$, 故$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数, 于是不存在$b_0 \neq a_0$, 使得$f(b_0)=0$.

又$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)] \leqslant (x_1-x_2)|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant (x_1-x_2)|x_1-x_2|=(x_1-x_2)^2$, 故$\lambda \leqslant 1$.

(2)要证: $(b-a_0)^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$, 即证$[a-a_0-\lambda f(a)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$, 即证 $\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)] \leqslant 2f(a)(a-a_0)$. 不妨设$a>a_0$. 由于$f(a_0)=0$, 于是$f(a)=f(a)-f(a_0)$, 又由$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$可得$f(a)(a-a_0) \geqslant \lambda(a-a_0)^2$, 则$2f(a)(a-a_0) \geqslant 2\lambda(a-a_0)^2$. (1)

又因为$f(a_0)=0$, 故可由$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|$得$f(a)=f(a)-f(a_0) \leqslant |f(a)-f(a_0)| \leqslant |a-a_0|$, 即$[f(a)]^2 \leqslant (a-a_0)^2$, 故$\lambda[f(a)]^2 \leqslant \lambda(a-a_0)^2$, 不等式两边同加$\lambda(a-a_0)^2$, 则有

$$\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)] \leqslant 2\lambda(a-a_0)^2. \quad (2)$$

由(1)、(2)可得$\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)] \leqslant 2f(a)(a-a_0)$, 因此$(b-a_0)^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$成立.

(3) $\because f(a_0)=0$, $\therefore f(b)=f(b)-f(a_0)$, $\therefore [f(b)]^2=[f(b)-f(a_0)]^2 \leqslant (b-a_0)^2$, 又由(2)中结论$(b-a_0)^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$, $\therefore [f(b)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

回顾: 在(1)的证明中, 把$f(x_1)-f(x_2)$放大成$|f(x_1)-f(x_2)|$是关键的一步, 因为有了这种结构上的变化, 才可以直接运用第二条性质解决此问; 在(2)和(3)的证明中, 利用$f(a_0)=0$, 把$f(a)$改写成$f(a)-f(a_0)$, 把$f(b)$改写成$f(b)-f(a_0)$, 这些变形起了重要的作用, 因为是这些变化创造了使用条件的机会, 也创造了解决问题的捷径.

五、联想→猜想→证明

有关抽象函数的问题往往是已知函数在定义域内满足的一些性质和运算法则, 进而推导和证明其他的一些性质和运算法则. 对于这类题目我们可以根据条件联想它的函数模型, 然后根据函数模型的性质和法则来猜测它的其他一些性质和法则, 进而找出解决此类问题的方法.

例7　已知函数$f(x)$适合下列性质:

① $f(2x_1)+f(2x_2)=f(x_1+x_2)f(x_1-x_2)$; ② $f(\pi)=0$; ③ $f(x)$不恒等于0.

(1)判断$f(x)$的奇偶性; (2)证明 $f(x)$是周期函数; (3)求证: 对任意的实数x, 有$f(x) \geqslant -2$成立.

分析如下:

联想: 因为$2\cos 2x_1+2\cos 2x_2=2\cos(x_1+x_2)\cdot 2\cos(x_1-x_2)$, 因而函数$f(x)$的模型可以是$y=2\cos 2x$.

猜想: (1)因为$y=2\cos 2x$是偶函数, 故猜想$f(x)$为偶函数.

(2)因为$y=2\cos 2x$是周期函数, π是它的最小正周期, 又当$x=\dfrac{\pi}{4}$时, $2\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, 而$f(\pi)=0$, π是$\dfrac{\pi}{4}$的四倍. 故可猜想$f(x)$也是周期函数, 4π为它的最小正周期.

(3)因为$y=2\cos 2x=2[2\cos^2 x-1]=(2\cos x)^2-2 \geqslant -2$, 故猜想$f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2-2 \geqslant -2$, 当且仅当$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=0$时等号成立.

下面给出(3)的证明.

令$x_1=x_2=\dfrac{x}{2}$, 由性质①知$2f(x)=f(x)f(0)$, 由性质③知$f(0)=2$.

令$x_1=\dfrac{x}{2}$, $x_2=0$, 由条件(1)得$f(x)+f(0)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$, 所以$f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2-f(0) \geqslant -2$.

六、运用验证法解题

(下转第3–23页)

一种二次方程根的分布讨论及简化策略

317000 浙江省临海市回浦中学 徐世白

近日在阅读有关文章时, 发现文中所给出的二次方程 $ax^2+bx+c=0\,(a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0)$ 在开区间 (α,β) 上有实根的充要条件还有欠缺. 而产生错误的原因在于忽略了二次函数图象过开区间端点的情形, 进行补救后不难得到: 在 $[p,q)$ 内有惟一实根(不含有两个相等的实根)的充要条件是

$f(p)\cdot f(q)<0$ 或
$\begin{cases} f(p)=0 \\ -\dfrac{b}{2a}<p \text{ 或 } -\dfrac{b}{2a}\geqslant\dfrac{p+q}{2} \end{cases}$ 或
$\begin{cases} f(q)=0 \\ \dfrac{p+q}{2}<-\dfrac{b}{2a}<q; \end{cases}$

在 $(p,q]$ 内有惟一实根(不含有两个相等的实根)的充要条件是

$f(p)\cdot f(q)<0$ 或
$\begin{cases} f(q)=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\leqslant\dfrac{p+q}{2} \text{ 或 } -\dfrac{b}{2a}>q \end{cases}$ 或
$\begin{cases} f(p)=0 \\ p<-\dfrac{b}{2a}<\dfrac{p+q}{2}. \end{cases}$

至此, 对一元二次方程根的分布的讨论已经比较深入. 但由于二次方程根的区间分布情况多种多样, 所讨论的根的情况又有"有根", "有惟一根", "有两个不同根"等不同要求, 需要列举的充要条件非常多. "授之以鱼, 不如授之以渔", 所以本人认为在具体教学时, 提供简洁的解决方案要比把各种情况的条件一一列举来得更为重要. 本文就试图通过一个例题的分析来寻求上述问题的合理简洁的解决方法.

1. 合理利用条件简化根的分布讨论

例 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$, $B=\{(x,y)|x-y+1=0$, 且 $0\leqslant x<2\}$, 若 $A\cap B$ 为单元素集, 求实数 m 的取值范围.

分析1: 集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$, $B=\{(x,y)|x-y+1=0$, 且 $0\leqslant x<2\}$ 的交集为单元素集, 可以等价转化为方程组 $\begin{cases} y=x^2+mx+2 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 在 $x\in[0,2)$ 上有惟一解. 消去 y, 问题又等价转化为方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 在 $x\in[0,2)$ 上有惟一解.

解法1: 问题等价转化为方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 在 $x\in[0,2)$ 上有惟一解. 根据前面对二次方程根的分布的讨论及 $f(0)=1>0$ 写出充要条件, 得 $f(2)<0$ 或 $\begin{cases} f(2)=0 \\ 1<-\dfrac{m-1}{2}<2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta=0 \\ 0<-\dfrac{m-1}{2}<2, \end{cases}$ 解得 $m<-\dfrac{3}{2}$ 或 $\begin{cases} m=-\dfrac{3}{2} \\ -3<m<-1 \end{cases}$ 或 $m=-1$, 即 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$ 或 $m=-1$.

上面的解题过程中, 有关文章给出的解答为"$f(2)<0$ 或 $\begin{cases} \Delta=0 \\ 0<-\dfrac{m-1}{2}<2 \end{cases}$", 解得 $m<-\dfrac{3}{2}$ 或 $m=-1$, 遗漏了图象过开区间边界时 $m=-\dfrac{3}{2}$ 的情况.

本题在解题时灵活地利用了"$f(0)=1$"这个隐含条件, 使得解题更加简洁. 所以在具体解题时, 要注意题中已有条件的应用, 要注意边界上有解, 特别是开区间端点的讨论, 分类讨论时做到宁细勿漏(严格从区间内及边界上进行讨论), 可以有效地避免错误的发生.

2. 采用合适方法回避根的分布讨论

上文给出的解决方法可以较好地解决有关根的分布讨论问题, 可以较有效地避免出错, 但

错误仍然是很难避免出现的, 其主要的原因就在于分类讨论的严密性, 所以下文尝试回避用根的讨论的方法.

2.1 变换参数回避讨论

分析2: 集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$ 和 $B=\{(x,y)|x-y+1=0$, 且 $0\leqslant x<2\}$ 的交集为单元素集, 可以等价转化为方程 $-x^2+x-1=mx$ 在 $[0,2)$ 上有惟一解时求 m 的取值范围. 若变换 m 的地位, 把 m 看成关于变量 x 的函数, 则问题就转化为求当 x 在区间 $[0,2)$ 取值惟一时, 求 m 的取值范围了.

解法2: 由题意, 问题等价转化为 $-x^2+x-1=mx$ 在 $x\in[0,2)$ 有惟一解.

当 $x=0$ 时, 方程等价转化为 $0\cdot m=-1$, 此时无解, 即使方程 $0\cdot m=-1$ 有解的 m 不存在; 当 $x\neq 0$ 时,两边同除以 x, 得到 $m=-x-\dfrac{1}{x}+1\ (x\in(0,2))$,

$\because\ x\in(0,2)$,

$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$,

$\therefore\ -x-\dfrac{1}{x}+1\in(-\infty,-1]$.

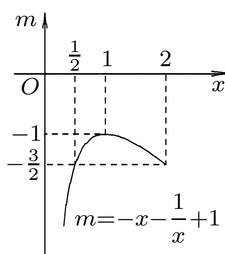


图 1

但考虑到所求的是惟一解, 结合图1不难得出当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$ 时, 对于同一个函数值，自变量 x 并不惟一. 所以符合题意的 x 的取值范围应是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 或 $x=1$, 由函数单调性可得 $x+\dfrac{1}{x}\in\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ 或者 $x+\dfrac{1}{x}=2$, 从而 $-x-\dfrac{1}{x}+1\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$ 或 $-x-\dfrac{1}{x}+1=-1$,

$\therefore$ m 的取值范围是 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$ 或 $m=-1$.

上面解题过程变换参数, 改变原题中 m 的参数地位为 m 关于 x 的函数关系, 进而转化为求 m 的取值范围问题, 使问题顺利解决.

此类方法在求恒成立问题, 参数取值范围等问题时, 也往往能取到意想不到的效果.

2.2 数形结合回避讨论

分析3: 集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$ 和 $B=\{(x,y)|x-y+1=0$, 且 $0\leqslant x<2\}$ 的交集为单元素集, 令 $y_1=-x^2+x-1$, $y_2=mx$, 画出函数图象, 如图2所示, 问题转化为函数 $y_1=-x^2+x-1\ (x\in[0,2))$, $y_2=mx$ 图象有惟一交点时, 求直线斜率 m 的取值范围.

解法3: 如图2所示, 可以看出当 $y_1=-x^2+x-1$, $y_2=mx$ 图象相切时, 方程 $-x^2+x-1=mx$ 在 $x\in[0,2)$ 有惟一解.

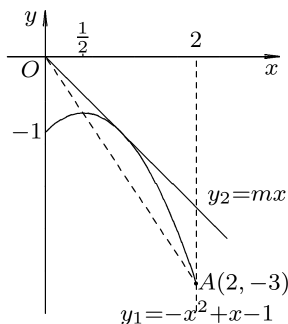


图 2

由 $x^2+(m-1)x+1=0$, 令 $\Delta=0$, 解得 $m=-1$ 或 $m=3$, 结合图象可知 $m=3$ 不符合题意, 从而 $m=-1$. 又当直线 $y_2=mx$ 经过点 $A(2,-3)$ 时, 函数 y_1、y_2 的图象也有惟一交点, 此时 $m=-\dfrac{3}{2}$, 结合图象可知, 当 $m<-\dfrac{3}{2}$ 或者 $m=-1$ 时, 函数 y_1、y_2 的图象都有惟一交点. 故满足条件的 m 的取值范围是 $m\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$ 或 $m=-1$.

从上例可以看出, 合理采用数形结合法进行解题, 可以有效地避开对二次方程根的讨论, 解题过程直观而且简洁, 这也体现了数学的简洁美.

递推数列求通项大观

312000 浙江省绍兴鲁迅中学 劳建祥

数列是高中数学中的重要内容, 它在高等数学中也有着较为广泛的应用, 因而其在高考中占有非同一般的地位. 求数列的通项公式就是其中最为常见的题型之一, 根据递推数列求出数列通项既可考查等价转化与化归这一数学思想, 又能反映考生对等差与等比数列理解的深度, 具有一定的技巧性, 因此探求递推数列的通项问题近年来经常渗透在各年的高考试题和竞赛中, 成为名副其实的"宠儿". 本文试着对高考与竞赛中几类常见的递推数列求通项问题作一些具体的探求.

类型1 由a_n与S_n给出的数列递推关系, 可利用a_n与S_n的关系求通项

已知S_n求a_n的问题在高考中屡屡出现, 此类题一般题中不直接给出数列$\{a_n\}$中a_{n+1}与a_n的递推式, 而是把其本质特征加以隐藏, 给出S_n与S_{n-1}的递推式或S_n与a_n的递推式, 这时首先需运用恒等式$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 通过代入或作差, 转化为$a_{n+1}$与$a_n$的递推式, 使问题得以显山露水.

例1 (1997年上海高考题) 设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$, 前n项和S_n满足关系式: $3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t\,(t>0,\ n=2,3,4,\cdots)$.

(1) 求证: 数列$\{a_n\}$是等比数列, 并求出a_n;

(2) 设数列$\{a_n\}$的公比为$f(t)$, 作数列$\{b_n\}$, 使$b_1=1$, $b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)\,(n=2,3,4,\cdots)$, 求$b_n$;

(3) 求和: $b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}$.

分析: (1) 先把题中给出的S_n与S_{n-1}的递推式转化为a_n与a_{n+1}的递推式,

由$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t\,(t>0,\ n=2,3,4,\cdots)$, 得$3tS_{n+1}-(2t+3)S_n=3t\,(t>0,\ n=1,2,3,4,\cdots)$,

后式减去前式得

$3ta_{n+1}-(2t+3)a_n=0$,

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2t+3}{3t}\,(n=2,3,4,\cdots)$,

把$a_1=1$即$S_1=1$代入条件得$S_2=\dfrac{5t+3}{3t}$, 从而$a_2=\dfrac{2t+3}{3t}$,

$\therefore \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+3}{3t}$,

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2t+3}{3t}\,(n=1,2,3,4,\cdots)$,

由定义知数列$\{a_n\}$是等比数列, 公比为$\dfrac{2t+3}{3t}$,

$\therefore a_n=\left(\dfrac{2t+3}{3t}\right)^{n-1}$.

(2) $f(t)=\dfrac{2t+3}{3t}$,

$$b_n=f\left(\frac{1}{b_{n-1}}\right)=\frac{\dfrac{2}{b_{n-1}}+3}{\dfrac{3}{b_{n-1}}}=b_{n-1}+\frac{2}{3}\,(n=2,3,4,\cdots),$$

$\therefore b_n-b_{n-1}=\dfrac{2}{3}\,(n=2,3,4,\cdots)$, 由定义知数列$\{b_n\}$是等差数列, 公差为$\dfrac{2}{3}$,

$\therefore b_n=b_1+(n-1)d=\dfrac{2n+1}{3}$.

(3) 由$b_n=\dfrac{2n+1}{3}$, 可知$\{b_{2n-1}\}$和$\{b_{2n}\}$是首项分别为1和$\dfrac{5}{3}$, 公差均为$\dfrac{4}{3}$的等差数列, 于是$b_{2n}=\dfrac{4n+1}{3}$, $\therefore b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}=b_2(b_1-b_3)+b_4(b_3-b_5)+\cdots+b_{2n}(b_{2n-1}-b_{2n+1})=-\dfrac{4}{3}(b_2+$

$b_4+\cdots+b_{2n})=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}n\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{4n+1}{3}\right)=-\frac{4}{9}(2n^2+3n)$.

说明: 解题时要特别注意正确运用等差或等比数列的定义, 注重思维的严密性. 如(1)中在导出 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2t+3}{3t}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ 后, 还不能判断数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

类型2 求形如"$a_n=a_{n-1}+f(n)$, 其中 $\{f(n)\}$ 的前有限项可求和"的通项

此类题型一般可利用叠加法求其通项公式, 即可通过作恒等变形 "$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$", 叠加求和得通项.

例2 (2003年全国高考文科试题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. (1)求 a_2、a_3; (2)证明: $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

(1)解: $\because$ $a_1=1$, $\therefore$ $a_2=3+1=4$, $a_3=3^2+4=13$.

(2)证明: 由已知 $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$, 故

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\\&\quad\cdots+(a_2-a_1)+a_1\\&=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+1\\&=\frac{3^n-1}{2}.\end{aligned}$$

注: 1999年全国高考试题中一道数列题与2003年试题中的此题如出一辙, 由此我们也可以看到近几年来高考的确十分重视对递推数列通项公式求法的考查.

类型3 求形如"$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$, 其中 $\{f(n)\}$ 的前 n 项的乘积容易化简"的通项

此类题型一般可利用叠乘法求其通项公式, 即可通过作恒等变形 "$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$", 叠乘求积得通项.

例3 (2000年全国高考题) 设 a_n 是首项为1的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 则它的通项公式是 $a_n=$________.

解: 对已知条件分解因式得

$(a_{n+1}+a_n)\cdot[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0$,

$\because$ $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列,

$\therefore$ $a_{n+1}+a_n\neq 0$,

$(n+1)a_{n+1}-na_n=0$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$ (n 取1, 2, 3, $\cdots$),

则 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{n}$.

类型4 求形如"$a_{n+1}=pa_n+q$ (p、q 为常数, $pq\neq 0$, $p\neq 1$)"的通项

这种题型一般有三种解法:

解法1: 两边同除以 p^{n+1} 得 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q}{p^{n+1}}$, 数列 $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ 即为类型2;

解法2: $a_{n+1}-a_n=pa_n+q-(pa_{n-1}+q)=p(a_n-a_{n-1})$, 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 即为等比数列;

解法3: 引入待定参数 k, 使 $a_{n+1}-k=p(a_n-k)$, 数列 $\{a_n-k\}$ 即为等比数列. 要求出 k, 只需把所构造递推式与原递推式比较得 $(1-p)k=q$, 故 $k=\frac{q}{1-p}$. 可求得其通项公式为 $a_n=\frac{q(p^{n-1}-1)}{p-1}+a_1p^{n-1}$.

例4 (2000年北京高考试题)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ f_2(x), x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$

其中 $f_1(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$, $f_2(x)=-2x+2$.

(1)在直角坐标系中作出 $y=f(x)$ 的图象;

(2)设 $y=f_2(x)$, $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1$, $a_2=g(a_1)$, $\cdots$, $a_n=g(a_{n-1})$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析: (2) $f_2(x)=-2x+2$, $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 求出反函数 $g(x)=1-\frac{x}{2}$, $x\in[0,1]$,

$\therefore$ $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n-1}$,

设 $a_n-k=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-k)$, 得 $k=\frac{2}{3}$,

$$\therefore\ \frac{a_n-\frac{2}{3}}{a_{n-1}-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2},$$

即数列$\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$是以$a_1-\frac{2}{3}$为首项, $-\frac{1}{2}$为公比的等比数列. 于是

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}.$$

类型5 求形如"$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ (其中$f(n+1)-f(n)=$常数"的递推数列的通项

一般可由$a_{n+1}-a_n$作差后, 转化成类型4求解.

例5 数列$\{a_n\}$满足条件: $a_1=b$, $a_{n+1}=ca_n+n+1$, 其中b、c是常数且$c\neq 1$, 求通项$\{a_n\}$.

解: 由$a_n=ca_{n-1}+n$知$a_{n-1}=ca_{n-2}+n-1$,

$\therefore\ a_n-a_{n-1}=c(a_{n-1}-a_{n-2})+1$,

令$b_n=a_n-a_{n-1}$, 则$b_n=c\cdot b_{n-1}+1$,

令$b_n-x=c(b_{n-1}-x)$, 得$x=\frac{1}{1-c}$.

而$b_n-x=c(b_{n-1}-x)=c^2(b_{n-2}-x)=\cdots=c^{n-2}(b_2-x)$,

即$a_n-a_{n-1}=c^{n-2}(b_2-x)+x$,

叠加得$a_n=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}[c^{k-2}(b_2-x)+x]=a_1+(b_2-x)\frac{1-c^{n-1}}{1-c}+(n-1)x$.

$\because\ a_1=b$, $a_2=ca_1+2=cb+2$,

$\therefore\ b_2=(c-1)b+2$.

故$a_n=b+\left[(c-1)b+2-\frac{1}{1-c}\right]\cdot\frac{1-c^{n-1}}{1-c}-(n-1)\frac{1}{c-1}$, 即

$$a_n=bc^{n-1}+\frac{n-c^{n-1}}{1-c}-\frac{c-c^n}{(1-c)^2}.$$

类型6 求形如"$a_{n+1}=pa_n+q^n$ (其中p、q是常数, $q\neq 0$)"的递推数列的通项

此类题型一般可在递推关系式两边同除以q^{n+1}后, 转化成类型4求解.

例6 已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3^n$, 求a_n.

解: 将$a_{n+1}=2a_n+3^n$两边同除以3^{n+1}, 得

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$, 令$\frac{a_n}{3^n}=b_n$, 则有$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$,

由此得$b_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\therefore\ a_n=3^n-2^n$.

类型7 求形如"$a_{n+1}=pa_n^r$ (其中p、r是常数, 且$p>0$, $a_n>0$)"的递推数列的通项

此类题型一般可通过两边取对数的方法化为$\lg a_{n+1}=r\lg a_n+\lg p$, 数列$\{\lg a_n\}$即为类型4.

例7 (2003年江苏省高考题)如图1, 设$a>0$, 已知直线$l: y=ax$及曲线$C: y=x^2$, C上的Q_1点的横坐标为a_1 $(0<a_1<a)$, 从C上的点Q_n $(n\geqslant 1)$作直线平行于x轴, 交直线l于点P_{n+1}, 再从点P_{n+1}作直线平行于y轴, 交曲线C于点Q_{n+1}. Q_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$的横坐标构成数列$\{a_n\}$, 试求a_{n+1}与a_n的关系, 并求$\{a_n\}$的通项公式.

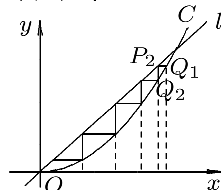


图 1

解: $\because$ 点Q_n在曲线C上,

$\therefore\ Q_n(a_n, a_n^2)$.

由题意Q_nP_{n+1}平行于x轴, 知

$P_{n+1}\left(\frac{1}{a}a_n^2, a_n^2\right)$, $Q_{n+1}\left(\frac{1}{a}a_n^2, \frac{1}{a^2}a_n^4\right)$,

故有递推关系式$a_{n+1}=\frac{1}{a}a_n^2$,

由已知$a_n>0$, 在递推关系式两边取常用对数有

$\lg a_{n+1}=2\lg a_n-\lg a$.

令$b_n=\lg a_n$, 则$b_{n+1}=2b_n-\lg a$,

$\therefore b_{n+1}-\lg a=2(b_n-\lg a)$, 则$b_n-\lg a=(b_1-\lg a)\cdot 2^{n-1}$,

$\therefore b_n=(b_1-\lg a)\cdot 2^{n-1}+\lg a$, 即$\lg a_n=\lg\dfrac{a_1}{a}\cdot 2^{n-1}+\lg a$,

$\therefore a_n=a\cdot\left(\dfrac{a_1}{a}\right)^{2^{n-1}}$.

注: 这里对数的底数可以换成其它有意义的数值, 如此题中若换成以a为底的对数运算会简单一些, 但需注意两边取以a为底的对数时必须满足$a>0$且$a\neq 1$.

类型8 求二阶线性齐次递推数列的通项

设二阶线性齐次递推数列的递推关系为: $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$ (其中p、q为常数且p、$q\neq 0$), 一般有如下两种解法.

解法1: 引入待定参数α、β, 使得$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$, 为定出$\alpha$、$\beta$, 把所构造递推式与原递推式比较, 有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p,\\ \alpha\cdot\beta=-q,\end{cases}$$

解方程$x^2-px-q=0$, 可求出α、β.

若$\alpha\neq\beta$,

有$a_n-\alpha a_{n-1}=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}$, $a_n-\beta a_{n-1}=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-2}$, 消去$a_{n-1}$得通项公式:

$$a_n=\frac{a_2(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})-qa_1(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{\beta-\alpha}.$$

若$\alpha=\beta$, 有

$a_n-\alpha a_{n-1}=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-2}$, 再据类型6有 $a_n=(n-1)a_2\alpha^{n-2}-(n-2)a_1\alpha^{n-1}$.

解法2: 同解法1求得α、β后, 则利用$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$是以β为公比的等比数列得 $a_n-\alpha a_{n-1}=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-2}$ (若$\alpha\neq\beta$, 则只取其中一组α、β的值即可), 此即类型6.

例8 数列$\{a_n\}$中, $a_1=a_2=1$, 且$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 求通项.

解: 设$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$ ($n\geqslant 2$), 则$a_{n+1}-(\alpha+\beta)a_n+\alpha\beta a_{n-1}=0$,

与已知递推式比较系数, 有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \alpha\beta=-1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2},\\ \beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2},\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=\dfrac{1-\sqrt5}{2},\\ \beta=\dfrac{1+\sqrt5}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt5}{2}a_n\\ =\dfrac{1-\sqrt5}{2}\left(a_n-\dfrac{1+\sqrt5}{2}a_{n-1}\right),\\ a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n\\ =\dfrac{1+\sqrt5}{2}\left(a_n-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_{n-1}\right),\end{cases}$$

$$\text{故}\begin{cases}a_n-\dfrac{1+\sqrt5}{2}a_{n-1}\\ =\left(a_2-\dfrac{1+\sqrt5}{2}a_1\right)\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-2},\\ a_n-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_{n-1}\\ =\left(a_2-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_1\right)\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-2}.\end{cases}$$

由此得

$$a_n=\frac{\sqrt5}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right].$$

注: 特别地, 对于形如"$a_{n+1}=(k+1)a_n-ka_{n-1}$ (k为常数)" 二阶线性齐次递推数列可凑配成"$a_{n+1}-a_n=k(a_n-a_{n-1})$", 然后转化为求等比数列$\{a_n-a_{n-1}\}$的通项, 再用叠加法求出通项$a_n$.

例 9 (1986 年全国高考题) 已知数列$\{a_n\}$, 其中$a_1=\dfrac{4}{3}$, $a_2=\dfrac{13}{9}$, 且当$n\geqslant 3$时, $a_n=\dfrac{4}{3}a_{n-1}-\dfrac{1}{3}a_{n-2}$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解: 把$a_n=\dfrac{4}{3}a_{n-1}-\dfrac{1}{3}a_{n-2}$变形为$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2})$ ($n\geqslant 3$), 即$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}(a_n-a_{n-1})$ ($n\geqslant 2$), $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{1}{3}$, $\therefore$ 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以a_2-a_1为首项, 公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列,

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, 再利用叠加法,

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

类型9 求二阶线性非齐次递推数列的通项

设二阶线性非齐次递推数列的递推关系为: $a_{n+1}=p\,a_n+qa_{n-1}+A$ (p、q、$A\neq 0$) 可用如下方法求解:

解法1: $a_{n+1}-a_n=(p\,a_n+q\,a_{n-1}+A)-(p\,a_{n-1}+q\,a_{n-2}+A)=p\,(a_n-a_{n-1})+q\,(a_{n-1}-a_{n-2})$,

数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 即类型8.

解法2: 引入待定参数 k、λ、μ, 使得 $a_{n+1}+\lambda a_n+\mu=k(a_n+\lambda a_{n-1}+\mu)$, 待定参数 k、λ、μ 可这样来确定, 把所构造的递推式与原递推式比较, 得 $\begin{cases}k-\lambda=p,\\ k\lambda=q,\\ \mu(k-1)=A,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\lambda^2+p\lambda-q=0,\\ k=\dfrac{q}{\lambda},\\ \mu=\dfrac{A\lambda}{q-\lambda}.\end{cases}$

例10 (2000年全国高中联赛试题加试二) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0=1$, $b_0=0$, 且

$$a_{n+1}=7a_n+6b_n-3 \qquad (1)$$
$$b_{n+1}=8a_n+7b_n-4 \qquad (2)$$

(这里 $n=0, 1, 2, \cdots$). 试证明: $a_n\,(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是完全平方数.

证明: 从递推式(1)解得 $b_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}-7a_n+3)$, 将之代入递推式(2)消去 b_{n+1}、b_n, 整理得 $a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n-6$, 此时 $p=14$, $q=-1$, $A=-6$, 并从原递推式易得

$a_1=4$. 由 $\lambda^2+14\lambda+1=0$, $k=-\frac{1}{\lambda}$, $\mu=\frac{6\lambda}{1+\lambda}$, 解得

$\lambda_1=-7+4\sqrt{3}$, $k_1=7+4\sqrt{3}$, $\mu_1=3-2\sqrt{3}$;

$\lambda_2=-(7+4\sqrt{3})$, $k_2=7-4\sqrt{3}$, $\mu_2=3+2\sqrt{3}$.

$\therefore\ a_n+\lambda a_{n-1}+\mu=(a_1+\lambda a_0+\mu)k^{n-1}$.

分别把 $a_1=4$, $a_0=1$、λ_1、μ_1、k_1 与 $a_1=4$, $a_0=1$、λ_2、μ_2、k_2 代入, 得

$$\begin{cases}a_n-(7-4\sqrt{3})a_{n-1}+3-2\sqrt{3}\\ =2\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})^{n-1},\\ a_n-(7+4\sqrt{3})a_{n-1}+3+2\sqrt{3}\\ =-2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})^{n-1}.\end{cases}$$

消去 a_{n-1} 得

$$a_n=\frac{(7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n+2}{4}$$
$$=\left[\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right]^2$$
$$=(2^n+3C_n^2 2^{n-2}+3^2C_n^4 2^{n-4}+\cdots)^2.$$

$\therefore\ a_n\,(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是完全平方数.

类型10 求形如“$a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ba_n+C}$”的分式线性递推数列的通项

两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{B}{A}+\frac{C}{A}\cdot\frac{1}{a_n}$, 令 $\frac{1}{a_n}=b_n$, 得 $b_{n+1}=\frac{C}{A}\cdot b_n+\frac{B}{A}$, 此即类型4.

例11 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=3$, 通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间满足

$2a_n=S_nS_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列, 并求公差;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析: (1) $\because\ a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$, 代入条件得: $2(S_n-S_{n-1})=S_nS_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

$\therefore\ \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=-\frac{1}{2}$ $(n\geqslant 2)$, 故 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列, 且公差 $d=-\frac{1}{2}$;

(2) $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+(n-1)d=\frac{5-3n}{6}$, 即

$S_n=\frac{6}{5-3n}$,

$$a_n=\begin{cases}3 & (n=1),\\ \frac{18}{(3n-5)(3n-8)} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

类型11 求形如"$a_{n+1}=\frac{Aa_n+B}{Ca_n+D}$"的分式线性递推数列的通项

此类型一般可引入待定系数λ、μ、t, 使得$a_{n+1}+\lambda=\frac{t(a_n+\lambda)}{C(a_n+\lambda)+\mu}$, (这里待定系数$\lambda$、$\mu$、$t$的值可与原递推式相比较求得), 则数列$\{a_n+\lambda\}$为类型10.

例12　已知$a_1=4$, $a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+4}$, 求$a_n$.

解: 设$a_{n+1}+\lambda=\frac{t(a_n+\lambda)}{(a_n+\lambda)+\mu}$, 则有

$a_{n+1}a_n+(\lambda+\mu)a_{n+1}+(\lambda-t)a_n+\lambda^2+\mu\lambda-t\lambda=0$,

又 $\because$ $a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+4}$,

$\therefore$ $a_{n+1}a_n+4a_{n+1}-3a_n-2=0$.

比较上面两式可得:

$$\begin{cases}\lambda+\mu=4,\\ \lambda-t=-3,\\ \lambda^2+\mu\lambda-t\lambda=-2,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\lambda_1=2,\\ \mu_1=2,\\ t_1=5,\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_2=-1,\\ \mu_2=5,\\ t_2=2.\end{cases}$

把λ_1、μ_1、t_1的值代入所构造的递推式得$a_{n+1}+2=\frac{5(a_n+2)}{(a_n+2)+2}$, 此即类型10, 可求得

$$a_n=\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}.$$

注: 若把λ_2、μ_2、t_2的值代入所构造的递推式得$a_{n+1}-1=\frac{2(a_n-1)}{(a_n-1)+5}$, 易求得

$$a_n=\frac{1+\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}},\text{ 亦为}$$

$$a_n=\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}.$$

~~~~~~

(上接第3–20页)

$A(0,0,0)$、 $F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$、 $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$、$B_1(1,0,1)$, $\overrightarrow{AF}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AE}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $|AE|=|AF|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $|EF|=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故$\triangle AEF$为等腰三角形, EF上的高为h, 则

$$h=\sqrt{AE^2-\left(\frac{1}{2}EF\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},$$

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}|EF|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{8}.$$

设点B_1到平面AEF的距离为d, 平面AEF的法向量$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases}y+\frac{1}{2}z=0\\ x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}z=-2y\\ x=-\frac{1}{2}y,\end{cases}$$

故$\overrightarrow{n}=(-1,2,-4)$, $\overrightarrow{B_1F}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$,

$$d=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{5}{\sqrt{21}},$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{8}\cdot\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{5}{24}.$$

[教学总结]

今天我们共同回顾了旧知识, 探讨出利用向量工具求点到平面的距离、直线到平面的距离和平面到平面的距离, 得到了公式 $d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$, 并利用向量的坐标表示, 算出了所求距离, 体现了"图形、向量、坐标运算三位一体", 也凸现了数学的"化归思想".
~~~~~~

构造向量解决有关初等代数问题

730070 西北师大数学与信息科学学院 张定强

向量作为近代数学中重要和基本的概念之一, 是沟通代数、几何与三角函数的一种工具, 对研究和解决一些数学问题有独特的功效. 本文基于《高中数学课程标准》中的内容要求, 从4个方面通过一些典型的问题具体探讨向量方法在研究代数问题中的作用, 以感受向量理论在解决有关初等代数问题上的一些精妙之处.

1. 证明不等式

一些数学问题代数化以后, 更多的表现形式是一些不等式. 因此, 不等式的证明也就成为初等代数的核心问题之一, 证明不等式的方法较多, 但利用向量的基本性质、基本运算推证一些不等式比通常使用的方法有其独到的妙处.

问题1 证明两个随机变量x、y的相关系数$r\in[-1,1]$. 相关系数r的数学表达式为 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ (其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\ \overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$), 证明$-1\leqslant r\leqslant 1$.

证明这个问题看起来很复杂, 其实合理构造向量, 利用向量的一些知识是容易解决的.

证明: 构造向量 $\overrightarrow{u}=\{x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},\cdots,x_n-\overline{x}\}$, $\overrightarrow{v}=\{y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},\cdots,y_n-\overline{y}\}$, 那么由向量数量积的定义及性质有 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|\leqslant|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|$, 而 $|r|=\dfrac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$, 故有$-1\leqslant r\leqslant 1$成立.

问题2 求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

证明: 构造向量$\overrightarrow{m}=\{a,b\}$, $\overrightarrow{n}=\{1-a,1-b\}$, $\overrightarrow{u}=\{a,1-b\}$, $\overrightarrow{v}=\{1-a,b\}$.

由于$|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|\leqslant|\overrightarrow{m}|+|\overrightarrow{n}|$, $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\leqslant|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$, 因此有$|\overrightarrow{m}|+|\overrightarrow{n}|+|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\geqslant|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|+|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=2\sqrt{2}$.

问题3 设a、b、x、y都是正数, 并且$x^2+y^2=1$, 求证$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}\geqslant a+b$.

简证: 构造向量$\overrightarrow{m}=\{ax,by\}$, $\overrightarrow{n}=\{bx,ay\}$. 由于$|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|\leqslant|\overrightarrow{m}|+|\overrightarrow{n}|$, 将坐标代入即有上述结论.

2. 解方程(组)

方程、方程组是初等代数中的核心内容, 方程、方程组的解题方法是初等代数的基本目标, 下面通过例题给出可用向量方法解决的一类不定方程组.

问题4 求方程组$\begin{cases}x+y+z=3\\x^2+y^2+z^2=3\end{cases}$的推广方程组$\begin{cases}lx+my+nz=a\\x^2+y^2+z^2=b\end{cases}$的解.

解: 令$\overrightarrow{u}=\{l,m,n\}$, $\overrightarrow{v}=\{x,y,z\}$, $\theta=\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. 由于$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=lx+my+nz=\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta=\sqrt{b}\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cos\theta=a$.

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{b(l^2+m^2+n^2)}}$, 又因为$\dfrac{a}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=r$其实是原点$O(0,0,0)$到平面$lx+my+nz=a$的距离, 所以

① 当$r>\sqrt{b}$时, 平面$lx+my+nz=a$与球面$x^2+y^2+z^2=b$相离, 所以上述不定方程组无解;

② 当$r=\sqrt{b}$时, 平面$lx+my+nz=a$与球面$x^2+y^2+z^2=b$相切, 上述不定方程组有惟一一组解, 因为此时$\cos\theta=1$, 即向量$\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$共线, 根据两向量共线的充要条件,

有 $x=kl$, $y=km$, $z=kn$, 代入上述不定方程组求得其解为 $x=\dfrac{al}{l^2+m^2+n^2}$, $y=\dfrac{am}{l^2+m^2+n^2}$, $z=\dfrac{an}{l^2+m^2+n^2}$;

③ 当 $r<\sqrt{b}$ 时, 平面与球面相交于一圆, 所以上述不定方程组的解为一相交圆.

上述问题还可推广为解方程组

$$\begin{cases} lx+my+nz=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

简解: 此方程组的几何意义是平面与椭球面有无公共元素的问题, 由于过椭球面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=1$, 其法向量为 $\overrightarrow{v}=\left\{\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2},\dfrac{z_0}{c^2}\right\}$, 而已知平面的法向量是 $\overrightarrow{u}=\{l,m,n\}$,

当 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 平行且切平面与已知平面重合时有一解: $x_0=la^2$, $y_0=mb^2$, $z_0=nc^2$, 即 $l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2=1$ 时方程组有惟一解;

当 $l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2<1$ 时方程组的解为一相交椭圆;

当 $l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2>1$ 时方程组无解.

进一步推广: 解方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i=1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^2}{b_i^2}=1. \end{cases}$$

这种基于类比法从低维问题向高维问题推广, 有利于开发学生的思维, 具有一定的挑战性, 是进行探究学习的好素材.

3. 求函数的极值

由于函数是刻划变量之间依赖关系的重要数学模型, 因而它理应成为高中数学学习的重要内容, 全面深入地挖掘函数的性态就是函数学习的重点. 下面我们通过例题，借助于向量知识就如何巧妙地求函极值的问题进行讨论.

问题5 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的哪一点到 $x+y-4=0$ 的距离最远、最近.

解: 设 (x,y) 为题中椭圆上的任一点, 其到已知直线的距离 $s=\dfrac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}$, 变形为 $4\pm\sqrt{2}s=x+y$, 构造向量 $\left\{\dfrac{x}{\sqrt{3}},y\right\}$, $\{\sqrt{3},1\}$, 作数量积, 有

$$|x+y|=\left|\left\{\frac{x}{\sqrt{3}},y\right\}\cdot\{\sqrt{3},1\}\right|\leqslant 2,$$

因此有 $-6\leqslant-\sqrt{2}s\leqslant-2$, 当且仅当 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\div\sqrt{3}=y\div 1$, 即 $x=3y$ 时, 等号成立. 代入椭圆方程, 求出所求点的坐标为 $A\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$、$B\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

推广1: 在圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1$ 上, 求到直线 $ax+by+c=0$ 距离的最远、最近点.

推广2: 在"超椭球面" $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2}=1$ 上, 求到"超平面" $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n+c=0$ 的距离最远、最近点.

简解: 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i>1$ 时, "超椭球面"与"超平面"相离, 可求最远点与最近点坐标, 因为 $s=\dfrac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}}$, 有 $\pm s\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}-c$

$$=\left\{\frac{x_1}{a_1},\frac{x_2}{a_2},\cdots,\frac{x_n}{a_n}\right\}\cdot\{b_1a_1,b_2a_2,\cdots,b_na_n\},$$

即有

$$\left|\pm s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}-c\right|=\left|\left\{\frac{x_1}{a_1},\frac{x_2}{a_2},\cdots,\frac{x_n}{a_n}\right\}\cdot\{b_1a_1,b_2a_2,\cdots,b_na_n\}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_ia_i)^2},$$

故有

$$-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_ia_i)^2}\leqslant\pm s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}-c\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_ia_i)^2}.$$

这样当 $x_1=kb_1a_1^2$, $x_2=kb_2a_2^2$, $\cdots$, $x_n=kb_na_n^2$ 时可取最值, 代入"超椭球面"方程有 $k^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2a_i^2\right)=1$.

故所求点为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中

$$x_i=\frac{b_ia_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2a_i^2}}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

及

$$x_i=-\frac{b_ia_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2a_i^2}}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

问题6 (第七届美国数学竞赛题)已知 $a+b+c+d+e=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$, 求e的最大值.

解: 设$\overrightarrow{m}=\{1,1,1,1\}$, $\overrightarrow{n}=\{a,b,c,d\}$, 由向量数量积的定义有

$|a+b+c+d|=|8-e|=|2\sqrt{16-e^2}\cos\theta|\leqslant 2\sqrt{16-e^2}$,

解之有$e\leqslant\dfrac{16}{5}$, 当且仅当$a=b=c=d=\dfrac{6}{5}$时取"="号.

利用同样的思考方法可以解决下面的几个新问题(解答留给读者):

1. 已知: $a>0$, $b>0$, 且$a^2+\dfrac{b^2}{2}=1$, 求$a+\sqrt{1+b^2}$的极值.

2. 已知: $a+b=1$, 对任意实数m、n有$(m+a)^2+(n+b)^2\geqslant\dfrac{1}{2}(m+n+1)^2$.

3. 已知: $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, 求$m=3x+4y$的最值.

4. 已知正实数x、y、z满足$x+y+z=a$, 则$\dfrac{x^2}{z}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{z^2}{y}\geqslant a$(其中$a$为正常数).

提示: 可构造向量$\overrightarrow{u}=\{\sqrt{z},\sqrt{x},\sqrt{y}\}$, $\overrightarrow{v}=\left\{\dfrac{x}{\sqrt{z}},\dfrac{y}{\sqrt{x}},\dfrac{z}{\sqrt{y}}\right\}$, 即可解决问题.

4. 一些代数公式的推证

借助于向量的有关理论知识可以灵活地推证初等代数中的一些重要不等式, 关键是要合理地构造向量, 适时地运用向量的一些基本理论, 方可正确解决问题.

问题7 柯西不等式与三角形不等式.

1. 求证: 对任意两组实数a_1, a_2, $\cdots$, a_n; b_1, b_2, $\cdots$, b_n. 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

证明: 构造向量$\overrightarrow{u}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $\overrightarrow{v}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 由于$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|\leqslant|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|$, 因此有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$.

2. 求证: 对任意两组实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n; b_1, b_2, $\cdots$, b_n. 有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

证明: 构造向量$\overrightarrow{u}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $\overrightarrow{v}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 由于$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\leqslant|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$, 因此有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

(上接第3-32页)

k的值. 一般地, 如果$\xi\sim B(n,p)$, 其中$0<p<1$. 讨论当k由0增加到n时, $P(\xi=k)$的变化情况; k取什么值时, $P(\xi=k)$取最大值?

仅就一般情形作出简解.

$P(\xi=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$. 解不等式$\dfrac{P(\xi=k+1)}{P(\xi=k)}=\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{p}{1-p}\geqslant 1$, 得$k\leqslant(n+1)p-1$.

若$(n+1)p$为整数, 则

$k=1,2,\cdots,(n+1)p$时, $P(\xi=k)$递增; $k=(n+1)p+1,\cdots,n$时, $P(\xi=k)$递减.

所以$P(\xi=(n+1)p)=P(\xi=(n+1)p-1)$时最大.

若$(n+1)p$为非整数, 则$P(\xi=k+1)\neq P(\xi=k)$, $k=1,2,\cdots,(n+1)p$时, $P(\xi=k)$递增; $k=(n+1)p+1,\cdots,n$时, $P(\xi=k)$递减.

故$k=[(n+1)p]$时, $P(\xi=k)$最大. 其中$[(n+1)p]$表示不超过$(n+1)p$的最大整数.

显然, 解决本题运用了数列单调性定义, 如若使用函数的导数, 则鞭长莫及.

因而, 一般涉及数列问题会更多地首先想到数列自身特征.

例析解概率题中的几类典型错误及错因

256500 山东省博兴一中 孙翠玲

概率是新教材中的重要内容, 然而学生在解概率问题时, 常常出现一些错误. 帮助他们找到错误的根源, 能增强其辨错能力, 提高解题速度和正确率. 下面例析常见概率错误类型及错因分析.

一、将"有放回"和"不放回"条件混用

例1 一个人有n把钥匙, 其中只有一把可以打开房门, 随机逐个试验钥匙, 试验后放回, 求"房门恰在第k次被打开"的概率.

错解1: $P(A)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}$.

错解2: $P(A)=\frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_n^k}=\frac{1}{n}$.

错因分析: 错解1的主要原因在于将"有放回"与"不放回"混淆, 这两种问题的主要不同点是:"有放回"的抽取每次被抽元素个数总是相同的, 而"不放回" 的抽取每次被抽元素个数不相同; "有放回" 的抽取时每次抽取都是独立事件, 概率互不影响, 而"不放回"的抽取每次抽取是相互影响的; 错解2的主要原因在于"有放回"的抽取问题中, 事件"一次抽取k个元素"与"逐次抽取k个元素"的概率是不同的, 而"不放回"的抽取问题中, 以上两个事件的概率是相同的.

正确解法: $P(A)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$.

解题时应注意被取对象的全体, 就可避免错误.

二、"相互独立事件"的概念不清, 造成理解性错误

例2 设一射手平均每射击10次中靶4次, 每次射中与否互不影响, 求在5次射击中, 第二次射击中靶的概率.

错解: $\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^4=0.05184$.

错因分析: 此题错解的主要原因在于独立事件的概念不清, 在独立事件中, 每一次试验中事件是否发生互不影响, 因此每次发生的概率都是相同的; 另外此题解答时实质上还将"第二次击中的概率"与"恰击中2次的概率"问题混淆, 因为 "恰击中2次"是指击中5次中的2次, 其他次未击中, 它的概率是

$$C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=0.3456.$$

正确解答: 因为每次射击都是独立的, 第二次击中的概率与任何一次击中的概率都是相等的为0.4.

三、"相互独立事件"与"互斥事件"互相混淆

例3 某零件从毛坯到成品, 一共要经过六道自动加工工序. 如果各道工序出次品的概率依次为0.01、0.02、0.03、0.03、0.05、0.05, 那么这种零件的次品率是多少?

错解: 设第i道工序出次品的事件为A_i, $i=1$、2、$\cdots$、6, A_i是互斥事件, 则A_i中至少有一个事件发生就为次品, 故这种零件的次品率为$P(A_1+A_2+\cdots+A_6)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_6)=0.19$.

错因分析: 错将相互独立事件看成互斥事件. 由题意, 只有同时经过六道工序才能将事件完成, 不能只考虑一道工序是否通过.

正确解答: 设第i道工序出次品的事件为A_i, $i=1$、2、$\cdots$、6, 它们相互独立但不互斥, 则A_i中至少有一个事件发生就为次品, 应该用和积互补公式得: 这种零件的次品率为

$P(A_1+A_2+\cdots+A_6)$
$=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_6})$
$=1-(1-0.01)(1-0.02)(1-0.03)(1-0.03)(1-0.05)(1-0.05)$
$\approx 0.176.$

例4　某家庭电话在家中有人时, 打进的电话响第1声时被接的概率为0.1, 响第2声时被接的概率为0.3, 响第3声时被接的概率为0.4, 响第4声时被接的概率为0.1, 那么电话在前4声内被接的概率是多少?

错解: 由题意知: 电话在前4声内被接的概率是 $P=0.1\times0.3\times0.4\times0.1=0.0012$.

错因分析: 错将互斥事件看成相互独立事件同时发生事件. 电话在第i声被接和电话在第j声被接($i\neq j$且i、$j\in\{1,2,3,4\}$)是互斥事件.

正确解法: $P=0.1+0.3+0.4+0.1=0.9$.

四、将"有顺序"与"无顺序"问题混淆

例5　设一射手平均每射击10次中靶4次, 每次射中与否互不影响, 求在5次射击中, (1)恰击中2次的概率; (2)第2、3两次击中的概率.

错解: "恰击中2次的概率"="第2、3两次击中的概率" $=C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=0.3456$.

错解分析: 在独立事件中, 事件发生2次与2次发生的位置有关, 可以有C_5^2种不同的排法, 而第2、3两次击中只是C_5^2种方法中的一种.

正确解答: (1)恰击中2次的概率
$P=C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=0.3456$;

(2)第2、3两次击中的概率$P=0.4\times0.4=0.16$.

五、在相互独立事件中, 对"在第k次发生与否都结束事件条件下恰在第k次结束"与"前$k-1$次不发生而第k次发生"的关系理解错误

例6　甲、乙两名篮球队员轮流投篮, 直至某人投中为止. 设每次投篮甲投中的概率为0.4, 乙投中的概率为0.6, 而且不受其他次投篮结果的影响, 设甲投篮次数为ξ, 若甲先投, 则$P(\xi=k)$等于 ……………………( )

(A) $0.6^{k-1}\times0.4$;　(B) $0.24^{k-1}\times0.76$;
(C) $0.4^{k-1}\times0.6$;　(D) $0.76^{k-1}\times0.24$.

错误答案: (A).

错因分析: 错误地将事件"$\xi=k$"发生理解为甲在前$k-1$次未投中而在第k次投中.

正确解答: 前$k-1$轮投篮中甲、乙均未投中且在第k轮中甲、乙至少有一人投中, 记前$k-1$轮投篮中甲、乙均未投中的事件A, 其概率为 $P(A)=(1-0.4)^{k-1}\times(1-0.6)^{k-1}=0.24^{k-1}$.

记第k轮中甲、乙至少有一人投中的事件B, 其概率利用对立事件的概率公式得

$P(B)=1-(1-0.4)\times(1-0.6)=0.76$, 故$P(\xi=k)=P(A)\cdot P(B)=0.24^{k-1}\times0.76$. 选(B).

例7　有一批数量很大的产品, 其次品率是15%, 对这批产品进行抽查, 每次抽出1件, 如果抽出次品, 则抽查终止, 否则继续抽查, 直到抽出次品, 但规定抽查次数不超过10次.

(1)求抽查次数ξ为4的概率;

(2)求抽查次数ξ为10的概率.

错解: (1) $P(\xi=4)=0.85^3$;

(2) $P(\xi=10)=0.85^9\times0.15$.

错因分析:

(1)将4次独立事件同时发生的概率与前3次事件发生第4次必然发生混为一谈, 这样将第4次发生的概率当作1而致错;

(2)将"$\xi=10$"事件理解为前九次均未抽到次品, 而第10次恰好抽到次品, 将第10次也未抽到次品的情况丢掉而出错.

正确解答:

(1)从这批产品中每次抽取一件检查的试验可以认为是相互独立的, 每次取出次品的概率为0.15, 取出正品的概率为0.85, 当$k=1$, 2, 3, $\cdots$, 9时, 前$k-1$次取出正品而第k次取到次品的概率均为 $P(\xi=k)=0.85^{k-1}\times0.15$, 所以 $P(\xi=4)=0.85^3\times0.15$;

(2)$\xi=10$即表示前9次均未抽到次品, 而第10次可以抽到次品, 也可以抽到正品, 所以$P(\xi=10)=0.85^9\times(0.15+0.85)=0.85^9$.

编后漫笔

关于教师的"一桶水"

张奠宙　赵小平

几十年前, 有一句教育老话是: "要给学生一杯水, 教师得有一桶水". 一个中学数学教师虽然只教中学数学, 但必须学习数学分析、高等代数、函数论、微分方程、概率论、微分几何等高等数学课程. 要当好数学教师, 必须吃透《数学标准》, 搞通数学教材, 做过数学难题, 经历过深层次的数学思考, 包括做一点数学研究, 其目的都是为了帮助教师储备一桶水.

现在, 据说这样的观点不时兴了. 听课时发下来某些"评课表", 居然只有"情意过程"、"认知过程"、"因材施教"、"教学基本功"四个指标. 至于数学概念是否清楚, 数学论证是否合理, 数学思想是否阐明, 则处于次要地位, 可有可无. 如此釜底抽薪, 数学课堂危险.

按这种评课的理念, 老师们何需有一桶水? 一杯水也行, 只要告诉学生到大河里去"取水"就行了. 极而言之, 教师可以没有水, 只要组织学生、引导学生、与学生合作, 一起去探究挖井, 那样"建构"得水的过程是何等"美妙"啊! "水是否好喝"的结果并不重要, 重要的是那个过程啊!

学生应该主动取水, 包括几次打井. 然而, 打井取水, 一辈子难得经历几次. 平常还是得喝自来水、喝"桶装水".

总之, 数学老师还是需要清醒一些, 继续保持自己的"一桶水", 而不能变成"半瓶醋". 至于一桶水如何成为学生杯子里的"水", 那当然要遵循教育规律, 学习先进的教育理念.

(上接第3–5页)

而此调查显示, 学生实际上并不能真正理解坐标的含义. 尽管从表面上看, 大部分学生能正确回答直线方程的问题, 事实上, 学生的回答是根据以往解题的经验和记忆. 如果能在充分理解坐标与点的关系的基础上, 再来考虑线性方程的解与直线交点间的关系, 那么学生真正理解它的可能性会大一些.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》. 北京师范大学出版社. 2001年版.

[2] The CSMS Mathematics Team 《Children's Understanding of Mathematics: 11−16》 Great Britain at the Alden Press Oxford London and Northampton. 1987.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第3期
(总第210期)
主编: 张奠宙　赵小平
常务副主编: 忻重义
电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出　　版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字 07017 号
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math. ecnu. edu. cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357